

## Una nueva frontera. El cubo de Rubik más grande del mundo

Narcis Abella Llos

**ADVERTIMENT.** L'accés als continguts d'aquest treball de recerca i la seva utilització ha de respectar els drets de la persona autora. Pot ser utilitzada per a consulta o estudi personal, així com en activitats o materials d'investigació i docència en els termes establerts a l'art. 32 del Text Refós de la Llei de Propietat Intel·lectual (RDL 1/1996). Per a altres utilitzacions es requereix l'autorització prèvia i expressa de la persona autora. En qualsevol cas, en la utilització dels seus continguts caldrà indicar de forma clara el nom i cognoms de la persona autora i el títol del treball. No s'autoritza la seva reproducció o altres formes d'explotació efectuades amb finalitats de lucre ni la seva comunicació pública des d'un lloc aliè al web de la URL. Aquesta reserva de drets afecta tant als continguts del treball com als seus resums i índexs.

**ADVERTENCIA.** El acceso a los contenidos de este trabajo de investigación y su utilización debe respetar los derechos de la persona autora. Puede ser utilizada para consulta o estudio personal, así como en actividades o materiales de investigación y docencia en los términos establecidos en el art. 32 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (RDL 1/1996). Para otros usos se requiere la autorización previa y expresa de la persona autora. En cualquier caso, en la utilización de sus contenidos se deberá indicar de forma clara el nombre y apellidos de la persona autora y el título del trabajo. No se autoriza su reproducción u otras formas de explotación efectuadas con fines lucrativos ni su comunicación pública desde un sitio ajeno al web de la URL. Esta reserva de derechos afecta tanto al contenido de la tesis como a sus resúmenes e índices.

**WARNING.** The access to the contents of this research work and its use must respect the rights of the author. It can be used for reference or private study, as well as research and learning activities or materials in the terms established by the 32nd article of the Spanish Consolidated Copyright Act (RDL 1/1996). Express and previous authorization of the author is required for any other uses. In any case, when using its content, full name of the author and title of the work must be clearly indicated. Reproduction or other forms of for profit use or public communication from outside URL web is not allowed. These rights affect both the content of the work and its abstracts and indexes.



---

# UNA NUEVA FRONTERA EL CUBO DE RUBIK MÁS GRANDE DEL MUNDO

---

Ideación y creación de un cubo de Rubik de 49x49



10 DE ENERO DE 2022  
NARCÍS ABELLA LLOS  
Sant Cugat del Vallès. Barcelona, España

# Agradecimientos

Querría agradecer a todas las personas y empresas que han ofrecido su tiempo y recursos para hacer posible este proyecto.

Agradecer a INGENIAS su profesionalidad y sinceridad al recomendar no formalizar la patente del proyecto, a ABAX por la rapidez con la que han estudiado y determinado los costes de producción del proyecto, a gente como Paul Fox, Matthew Greco, Joan Camps d'Ausà y Raúl Fernández Carasa por la ayuda ofrecida, los conocimientos aportados y las ideas que han ayudado a perfeccionar este proyecto. Agradecer sobre todo a HP, en especial a Josep María del Río y a Manuel García, por la gran ayuda que me han ofrecido y por proporcionarme recursos y acceso a su tecnología.

Por último, pero no menos importante, dedicarte a ti, María, este proyecto. Nada de esto habría sido posible sin ti. Tú me has acompañado durante todo este largo proceso incondicionalmente, tú te has asegurado de que mi motivación y dedicación no decayera, tú me has empujado cuando creía que nada de esto sería posible. Gracias, lo hemos logrado.

## Abstract

Este trabajo tiene por objetivo analizar, idear y diseñar el cubo de Rubik más grande que jamás haya existido en cantidad de piezas, con especial énfasis en las partes mecánica, técnica, matemática, física y legal de éste. A través de un estudio teórico de viabilidad, factibilidad, rentabilidad y sostenibilidad presentaremos la aplicación práctica de estos conceptos y justificaremos todas las decisiones tomadas durante su desarrollo. En este trabajo se verá que hemos logrado diseñar el que sería el cubo de Rubik más grande del mundo haciendo uso de un programa de diseño industrial, Fusion 360. Además, durante el transcurso del estudio, veremos también que hemos descubierto que no es posible conseguir una protección efectiva patentando el producto. En el presente estudio se demostrará que no hay tecnología que se adapte mejor al proyecto a nivel de tiempos de impresión, costes, resultados y sostenibilidad que la tecnología MJF (Multi Jet-Fusion) desarrollada por HP (Hewlett-Packard Development Company, L.P.). Veremos también que hemos cumplido todos los objetivos de este estudio y que sí, es posible diseñar cubos de Rubik mayores a los existentes, e incluso mayores al diseñado en este trabajo. Es por ello que este proyecto ofrece todavía oportunidades de desarrollo en las que se está trabajando juntamente con HP.

**Palabras clave:** Cubo de Rubik, Guinness World Record, Patente, Diseño industrial, Impresión 3D.

The aim of this work is to analyze, devise and design the largest Rubik's cube that has ever existed in number of pieces, with special emphasis on the mechanical, technical, mathematical, physical and legal parts of it. Through a theoretical study of feasibility, viability, profitability and sustainability, we will present the practical application of all these concepts and justify all the decisions taken during its development. In this project it is shown that we have succeeded in designing what would be the world's largest Rubik's cube using an industrial design program, Fusion 360. In addition, during the course of the study, we will also see that we have discovered that it is not possible to achieve effective protection by patenting the product. This study will demonstrate that there is no technology better suited to the project in terms of printing times, costs, results and sustainability than the MJF (Multi Jet-Fusion) technology developed by HP (Hewlett-Packard Development Company, L.P.). We will also see that we have met all the objectives of this study and that it is possible to design Rubik's cubes larger than the existing ones, even larger than the one designed in this work. Therefore, this project still offers development opportunities on which we are working together with HP.

**Keywords:** Rubik's cube, Guinness World Record, Patent, Industrial design, 3D printing.

# Índice

## Índice de contenido

1. Introducción y objetivos.....	14
2. Parte teórica.....	17
2.1 La estructura interna del cubo de Rubik .....	17
2.1.1 Mecánica de un cubo de Rubik de 3x3 .....	17
2.1.2 Diseño de un cubo de Rubik de 3x3 .....	23
2.1.3 ¿Por qué el cubo de Rubik tiene un número impar de piezas?.....	33
2.1.4 Mecánica de un cubo de Rubik de 5x5 .....	35
2.1.5 Diseño de un cubo de Rubik de 5x5 .....	39
2.1.6 ¿Por qué los cubos de Rubik mayores de 5x5 son teóricamente imposibles de diseñar? .....	47
2.1.7 La maravilla detrás de la creación del cubo de Rubik más grande del mundo .....	49
2.1.8 Cálculo de piezas en un cubo de Rubik .....	52
2.1.9 Cálculo de permutaciones en un cubo de Rubik .....	52
2.2 La fricción .....	61
2.2.1 Cómo reducir la fricción entre superficies .....	61
2.2.2 Cómo reducir la fricción en un cubo de Rubik.....	62
2.3 Tecnologías de impresión 3D .....	66
2.3.1 Inyección de plástico.....	66
2.3.2 Tecnología FDM.....	67
2.3.3 Tecnología SLA.....	69
2.3.4 Tecnología DLP .....	71
2.3.5 Tecnología SLS.....	72
2.3.6 Tecnología MJF .....	74
2.3.7 Tecnología MJ.....	76

2.3.8 Tecnología BJ .....	77
2.3.9 Comparación de las tecnologías (uso no industrial).....	79
2.3.10 Comparación de las tecnologías (uso industrial).....	80
2.3.11 Conclusiones de las tecnologías comparadas .....	80
2.4 ¿Qué es una patente de invención? .....	81
2.4.1 Requisitos para formalizar una patente.....	82
2.4.2 La patente en un ámbito jurídico y social .....	82
2.4.3 Cómo formalizar una patente .....	83
3. Parte práctica .....	86
3.1 Cantidad de piezas del cubo .....	86
3.2 Diseño de la estructura.....	87
3.2.1 Diseño de la estructura interior .....	87
3.2.2 Diseño de la estructura exterior .....	91
3.3 Tamaño de las piezas centrales .....	93
3.4 Tamaño de las piezas laterales .....	93
3.5 Reducción de masa interior .....	93
3.6 Diseño de la esfera interior .....	95
3.7 Permutaciones del cubo de Rubik .....	96
3.8 Aplicaciones para reducción de la fricción.....	97
3.9 Selección de la tecnología.....	97
3.10 Adaptación del diseño a la tecnología .....	98
3.11 Fase de preproducción .....	99
3.12 Estudio de la viabilidad de la patente .....	101
3.13 Análisis DAFO .....	102
3.14 Búsqueda de inversores y colaboradores.....	104
4. Conclusiones.....	105
5. Bibliografía .....	106

6. Anexo .....	110
----------------	-----

## Índice de ilustraciones

Ilustración 1   Elaboración propia   Vista frontal del cubo .....	17
Ilustración 2   Elaboración propia   Vista posterior del cubo .....	18
Ilustración 3   Elaboración propia   Vista frontal de los 6 centros .....	18
Ilustración 4   Elaboración propia   Vista posterior de los 6 centros .....	18
Ilustración 5   Elaboración propia   Vista frontal de los 8 vértices.....	18
Ilustración 6   Elaboración propia   Vista posterior de los 8 vértices.....	19
Ilustración 7   Elaboración propia   Vista frontal de las 12 aristas .....	19
Ilustración 8   Elaboración propia   Vista posterior de las 12 aristas .....	19
Ilustración 9   Elaboración propia   Vista frontal de los 6 ejes unidos a los 6 centros .....	20
Ilustración 10   Elaboración propia   Vista frontal de los 6 ejes en rotación.....	20
Ilustración 11   Elaboración propia   Vista frontal del cubo con corte transversal cerrado .....	21
Ilustración 12   Elaboración propia   Vista frontal del cubo con corte transversal.....	21
Ilustración 13   Elaboración propia   Vista frontal del cubo con piezas remarcadas en azul.....	21
Ilustración 14   Elaboración propia   Vista superior del corte transversal .....	22
Ilustración 15   Elaboración propia   Corte transversal con tolerancia entre las piezas .....	22
Ilustración 16   Elaboración propia   Corte transversal manteniendo una de cada pieza única.....	23
Ilustración 17   Elaboración propia   Piezas únicas replicadas en los 3 ejes .....	23
Ilustración 18   Elaboración propia   Piezas únicas comparadas con la vista posterior del cubo.....	24
Ilustración 19   Elaboración propia   Ilustración 18 desde un distinto ángulo .....	24
Ilustración 20   Elaboración propia   Representación de la pieza de la arista actuando como eje de rotación .....	25
Ilustración 21   Elaboración propia   Aplicación de Pitágoras en Ilustración 20.....	25
Ilustración 22   Elaboración propia   Aplicación de Pitágoras en Ilustración 17.....	25

Ilustración 23   Elaboración propia   Ilustración 20 con Pitágoras aplicado .....	26
Ilustración 24   Elaboración propia   Ilustración 22 con rectángulo de 60 x 30 mm. .	26
Ilustración 25   Elaboración propia   Ilustración 24 con ampliación del rectángulo en 30 mm por lado .....	27
Ilustración 26   Elaboración propia   Primer paso para crear la pieza central.....	27
Ilustración 27   Elaboración propia   Segundo paso para crear la pieza central .....	28
Ilustración 28   Elaboración propia   Vista frontal de la pieza central con las esquinas redondeadas .....	28
Ilustración 29   Elaboración propia   Primer paso para crear la pieza de la arista ....	29
Ilustración 30   Elaboración propia   Segundo paso para crear la pieza de la arista	29
Ilustración 31   Elaboración propia   Tercer paso para crear la pieza de la arista ....	30
Ilustración 32   Elaboración propia   Vista posterior de la pieza de la arista con las esquinas redondeadas .....	30
Ilustración 33   Elaboración propia   Vista frontal de la pieza de la arista con las esquinas redondeadas .....	31
Ilustración 34   Elaboración propia   Primer paso para crear la pieza del vértice .....	31
Ilustración 35   Elaboración propia   Segundo paso para crear la pieza del vértice .	32
Ilustración 36   Elaboración propia   Tercer paso para crear la pieza del vértice .....	32
Ilustración 37   Elaboración propia   Vista frontal de la pieza del vértice con las esquinas redondeadas .....	33
Ilustración 38   Elaboración propia   Vista posterior de la pieza del vértice con las esquinas redondeadas .....	33
Ilustración 39   Elaboración propia   Ilustración de un cubo de 5x5 con un corte transversal.....	34
Ilustración 40   Elaboración propia   Ilustración del corte transversal de un 5x5 .....	34
Ilustración 41   Elaboración propia   Vista superior del corte transversal del cubo de 5x5 .....	35
Ilustración 42   Elaboración propia   Cubo de 5x5 con piezas nuevas descoloridas	36
Ilustración 43   Elaboración propia   Cubo de 3x3 .....	36
Ilustración 44   Elaboración propia   Cubo de 5x5 con piezas que forman el centro coloridas.....	37
Ilustración 45   Elaboración propia   Cubo de 3x3 con pieza central colorida .....	37
Ilustración 46   Elaboración propia   Cubo de 5x5 con las piezas que forman la arista coloridas.....	37

Ilustración 47   Elaboración propia   Cubo de 3x3 con las piezas de la arista coloridas .....	38
Ilustración 48   Elaboración propia   Cubo de 5x5 con piezas de los vértices coloridas .....	38
Ilustración 49   Elaboración propia   Cubo de 3x3 con piezas de los vértices coloridas .....	38
Ilustración 50   Elaboración propia   Corte transversal manteniendo una de cada pieza única.....	39
Ilustración 51   Elaboración propia   Ilustración 50 con tolerancia aplicada .....	39
Ilustración 52   Elaboración propia   Ilustración 51 replicada en dos ejes con rectángulo de 60 x 30 mm .....	40
Ilustración 53   Elaboración propia   Piezas subcentrales coloridas .....	40
Ilustración 54   Elaboración propia   Primer paso para crear la pieza subcentral .....	41
Ilustración 55   Elaboración propia   Segundo paso para crear la pieza subcentral .....	41
Ilustración 56   Elaboración propia   Vista frontal de la pieza subcentral.....	42
Ilustración 57   Elaboración propia   Vista posterior de la pieza subcentral.....	42
Ilustración 58   Elaboración propia   Piezas descentrales coloridas .....	42
Ilustración 59   Elaboración propia   Primer paso para crear la pieza descentral .....	43
Ilustración 60   Elaboración propia   Segundo paso para crear la pieza descentral .....	43
Ilustración 61   Elaboración propia   Vista frontal de la pieza descentral.....	44
Ilustración 62   Elaboración propia   Vista posterior de la pieza descentral.....	44
Ilustración 63   Elaboración propia   Piezas intermedias coloridas.....	44
Ilustración 64   Elaboración propia   Primer paso para crear la pieza intermedia.....	45
Ilustración 65   Elaboración propia   Segundo paso para crear la pieza intermedia .....	45
Ilustración 66   Elaboración propia   Tercer paso para crear la pieza intermedia .....	46
Ilustración 67   Elaboración propia   Vista frontal de la pieza subcentral.....	46
Ilustración 68   Elaboración propia   Vista posterior de la pieza subcentral.....	46
Ilustración 69   Elaboración propia   Cubo de 5x5 con vértice rodeado.....	47
Ilustración 70   Elaboración propia   Cubo de 7x7 con vértice rodeado.....	47
Ilustración 71   Elaboración propia   Muestra de una pieza del vértice.....	47
Ilustración 72   Elaboración propia   Corte transversal de 5x5 con esquina rodeada.....	48
Ilustración 73   Elaboración propia   Corte transversal de 7x7 con esquina rodeada.....	48
Ilustración 74   Elaboración propia   Corte transversal de 7x7 con laterales ampliados y esquina rodeada.....	49

Ilustración 75   Captura de pantalla del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017) .....	50
Ilustración 76   Captura de pantalla del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017) .....	50
Ilustración 77   Captura de pantalla editada del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017) .....	51
Ilustración 78   Elaboración propia   Una sola pieza orientada en posición contraria a la habitual.....	54
Ilustración 79   Elaboración propia   Dos piezas permutadas entre ellas sin orientar .....	54
Ilustración 80   Elaboración propia   Una sola pieza del vértice orientada en posición errónea.....	55
Ilustración 81   Elaboración propia   Cubo de 7x7 con piezas nuevas coloridas .....	56
Ilustración 82   Elaboración propia   Piezas únicas nuevas de la arista .....	57
Ilustración 83   Elaboración propia   Piezas únicas nuevas centrales .....	57
Ilustración 84   Captura de pantalla editada del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017)   Tolerancias señalizadas.....	63
Ilustración 85   Elaboración propia   Cubo de 7x7 de baja calidad con objeto de 0,2 mm de grosor introducido.....	64
Ilustración 86   Elaboración propia   Cubo de 5x5 de alta calidad con objeto de 5 mm de grosor introducido.....	64
Ilustración 87   Elaboración propia   Muestra de una de las piezas del cubo mostrado en la Ilustración 86 .....	65
Ilustración 88   (3D Hubs)   Muestra de familias de tecnología de impresión 3D .....	66
Ilustración 89   (Bournias Varotsis, 3D Hubs )   Imagen explicativa del proceso de impresión en SLA.....	69
Ilustración 90   (van der Steen)   Imagen explicativa del proceso de impresión en DLP .....	71
Ilustración 91   (Sienra, 2021)   Estatua de Filippo Brunelleschi situada en el Palacio de los Canónigos, Florencia.....	81
Ilustración 92   Captura de pantalla (Fisher, 2018)   Imagen del corte transversal de 17x17 .....	88
Ilustración 93   Elaboración propia   Corte transversal elaborado a partir de la Ilustración 92   Captura de pantalla   Imagen del corte transversal de 17x17 .....	88
Ilustración 94   Elaboración propia   Ilustración 93 con la estructura interior remarcada en azul.....	89

Ilustración 95   Elaboración propia   Corte transversal del cubo de 49x49. Las piezas marcadas en azul son las piezas adicionales para pasar de una estructura interior de 9x9 a una de 17x17.....	89
Ilustración 96   Captura de pantalla del cubo de Rubik de 33x33 (Pfennig, 2017)   Imagen de comparación con cubo de 33x33. Piezas en azul son piezas añadidas para crear una estructura interior de 17x17, a diferencia de la estructura interior de 9x9 del cubo de Grégoire .....	90
Ilustración 97   Elaboración propia   Ilustración 95 Ilustrada en un plano. Las piezas marcadas en azul forman la estructura interior a partir de la técnica binary approach .....	90
Ilustración 98   Estructura interior creada a partir del plano de la Ilustración 97 .....	91
Ilustración 99   Elaboración propia   Solución de unión de las piezas de la estructura exterior. Primera pieza resaltada .....	92
Ilustración 100   Elaboración propia   Solución de unión de las piezas de la estructura exterior. Segunda pieza resaltada.....	92
Ilustración 101   Elaboración propia   solución de unión de las piezas de la estructura exterior .....	92
Ilustración 102   Elaboración propia   Imagen del cubo de Rubik de 49x49 que muestra la gran cantidad de área vacía gracias a la esfera interior .....	94
Ilustración 103   Captura de pantalla del cubo de Rubik de 33x33 (Pfennig, 2017)   Imagen de comparación con la Ilustración 102 .....	95
Ilustración 104   Elaboración propia   Esfera interior .....	95
Ilustración 105   Elaboración propia   Imagen de una de las dos mitades que conforman el cubo. En esta se ven las uniones de la esfera interior, el corte transversal y el área interna hueca.....	99
Ilustración 106   Elaboración propia   Primera mitad del cubo de 5x5.....	100
Ilustración 107   Elaboración propia   Segunda mitad del cubo de 5x5 .....	100
Ilustración 108   Elaboración propia   Caja para mantener las piezas unidas .....	100
Ilustración 109   Elaboración propia   Piezas de la Ilustración 106 en la caja de la Ilustración 108.....	101

## Índice de fórmulas

Fórmula 1   Elaboración propia   Ecuación para calcular aumento de los laterales de los cubos de Rubik mayores de 5x5 .....	49
Fórmula 2   Elaboración propia   Fórmula para calcular cantidad total de piezas en un cubo de Rubik impar .....	52
Fórmula 3   Elaboración propia   Ecuación base para calcular permutaciones de un cubo de Rubik .....	52
Fórmula 4   (Ibero Rubik, 2015)   Permutaciones totales de las piezas centrales ....	53
Fórmula 5   (Ibero Rubik, 2015)   Ecuación para calcular permutaciones de las piezas de la arista.....	54
Fórmula 6   (Ibero Rubik, 2015)   Ecuación para calcular permutaciones de las piezas de los vértices .....	55
Fórmula 7   (Ibero Rubik, 2015)   Ecuación para calcular permutaciones de un cubo de Rubik de 3x3 .....	55
Fórmula 8   Elaboración propia   Ecuación para calcular cantidad de piezas únicas nuevas de la arista .....	56
Fórmula 9   Elaboración propia   Ecuación para calcular cantidad de piezas únicas nuevas centrales .....	57
Fórmula 10   Elaboración propia   Ecuación para calcular permutaciones de las piezas únicas nuevas de la arista.....	58
Fórmula 11   Elaboración propia   Ecuación incompleta para calcular permutaciones de las piezas únicas nuevas centrales .....	59
Fórmula 12   Elaboración propia   Ecuación para calcular permutaciones de una pieza única nueva central de un solo color .....	59
Fórmula 13   Elaboración propia   Ecuación para calcular permutaciones de las piezas únicas nuevas centrales .....	59
Fórmula 14   Elaboración propia   Fórmula universal para calcular permutaciones de cualquier cubo de Rubik con un número de piezas impar.....	60

## Índice de tablas

Tabla 1   (Bournias Varotsis, 3D Hubs)   Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología FDM en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	68
Tabla 2   (Bournias Varotsis, 3D Hubs)   Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología FDM en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	68
Tabla 3   (Bournias Varotsis, 3D Hubs )   Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLA en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	70
Tabla 4   (Bournias Varotsis, 3D Hubs )   Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLA en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	70
Tabla 5   (van der Steen)   Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología DLP en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	72
Tabla 6   (van der Steen)   Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología DLP en uso tanto industrial como personal (no industrial) .....	72
Tabla 7   (Bournias Varotsis, 3D Hubs )   Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLS en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	73
Tabla 8   (Bournias Varotsis, 3D Hubs )   Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLS en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	74
Tabla 9   (Maw)   Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJF en uso tanto industrial como personal (no industrial) .....	75
Tabla 10   (Maw)   Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJF en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	75
Tabla 11   (Bournias Varotsis, 3D Hubs)   Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJ en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	77
Tabla 12   (Bournias Varotsis, 3D Hubs)   Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJ en uso tanto industrial como personal (no industrial).....	77

Tabla 13 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología BJ en uso tanto industrial como personal (no industrial)..... 78

Tabla 14 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología BJ en uso tanto industrial como personal (no industrial)..... 78

Tabla 15 | (3D Hubs) | Tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso no industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde ..... 79

Tabla 16 | (3D Hubs) | Segunda tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso no industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde ..... 79

Tabla 17 | (3D Hubs) | Tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde..... 80

Tabla 18 | (3D Hubs) | Tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde..... 80

Tabla 19 | Elaboración propia | Tabla de muestra de las posibles combinaciones de piezas para llegar a un tamaño u otro del cubo ..... 86

# 1. Introducción y objetivos

Hace 6 años descubrí el cubo de Rubik, un complejo puzle formado por seis caras de distintos colores. Se suponía que el reto era mezclarlo y devolverlo a su estado original. Fácil, ¿verdad? Empecé a jugar con él, y lo que supuestamente iba a ser un reto de pocos minutos se convirtió en días de desesperación y constancia tratando de lograr batir ese endiablado objeto. Poco a poco empecé a cogerle práctica, me acostumbré a su estructura y a sus movimientos, mis dedos se adaptaron a ello, cada vez eran más rápidos, mi mente intuía los próximos movimientos. Era una orquesta excelentemente organizada por su director, como si se tratara de una de las famosas sinfonías de Beethoven. El cubo de 3x3 pasó a ser algo simple, básico, quería nuevos retos. Así fue como descubrí el cubo de Rubik de 5x5, una bestia, una monstruosidad. Parecía completamente imposible resolver ese cubo, pero no tenía pensado rendirme. Empecé a investigar, descubrí sus trucos, sus métodos. Estudié hasta el más mínimo detalle, memoricé todos los movimientos, practiqué y practiqué hasta lograr capacitar mi mente y mi cuerpo a ese objeto. Y así, como de la nada, de repente era capaz de resolverlo en pocos minutos sin apenas pensar, eran movimientos completamente automatizados.

Mis ansias de comerme el mundo me pedían más, quería mayores retos, era insaciable. Resolví el cubo de Rubik de 4x4, el de 6x6, el de 7x7, descubrí cubos con formas exóticas y estructuras mucho más complejas, pero ninguno de esos cubos era capaz de derrotarme, siempre encontraba el método, esa técnica para resolver su compleja estructura. Seguí buscando nuevos retos, diseñé y programé un robot que resuelve los últimos pasos del cubo de Rubik de 3x3, desmonté y estudié cómo funcionan esos cubos. Aún me acuerdo de ese día que en la piscina y con un cubo de Rubik de 3x3 en las manos traté de resolver el cubo debajo del agua. No fue la mejor de las ideas, pero afortunadamente salí vivo y con el cubo de Rubik resuelto, aunque debo admitir que mis pulmones no estaban demasiado llenos de aire.

Después de todas esas experiencias, pasaron unos años en los que me olvidé de mi fanatismo con los cubos de Rubik. Se me habían hecho aburridos, no encontraba cubos que me supusieran un reto de verdad. Me enfoqué en mis estudios y en mí mismo, descubrí otras pasiones mientras esos maravillosos puzles se llenaban de

polvo y mugre. Pensaba que eran cosa del pasado, una pasión muerta, abandonada en el olvido, pero nada fuera de la realidad.

Por ese entonces tenía quince años, estaba estudiando secundaria y una de mis asignaturas favoritas era tecnología. Yo ya había usado anteriormente plataformas como Sketchup, es decir, programas de diseño industrial. Mis conocimientos eran mínimos, pero ya tenía una base sólida. Un día, de la nada, se me ocurrió que sería buena idea tratar de diseñar un cubo de Rubik de 7x7. Poco a poco empecé a comprender cómo se diseñan los cubos, y me di cuenta de que era capaz de diseñar un cubo más grande. Entonces traté de diseñar un cubo de 17x17, y dije, ¿y si voy a más? Me puse a investigar y fue entonces cuando descubrí la colosal obra de arte de Grégoire Pfennig. Un gigantesco cubo de Rubik de 33x33, el cubo de Rubik más grande del mundo. Quedé fascinado ante esa bestia, no podía creer que fuese posible. Miré todos sus vídeos, estudié su estructura, su funcionamiento. Quería comprender cómo un cubo de ese tamaño podía funcionar. En aquel momento me propuse el reto de superar ese récord. Empecé con algunos diseños en la plataforma de Sketchup, una muy mala idea, ya que no está creada para ello. Probé otras aplicaciones, otras funcionalidades... Cada vez comprendía más su estructura, cada parte, cada pieza, cada corte. Fui de cero a cien, de no tener ningún conocimiento en el diseño de cubos de Rubik a diseñar el cubo de Rubik más grande de la historia; algo que sinceramente no recomendaría a nadie. Finalmente, después de 2 intensos años, tengo el placer de anunciar el definitivo diseño del cubo de Rubik más grande del mundo, un cubo de Rubik de 49x49.

Los **objetivos de este proyecto** son varios y se reconocen como objetivos a corto, medio y largo plazo. En este documento no se recogen los objetivos a medio y largo plazo del proyecto ya que la fecha límite de entrega no cumpliría con los plazos determinados para dichos objetivos, como, por ejemplo, finalizar la fase de producción del cubo debido a su gran coste económico y de tiempo de impresión.

- El primero y más importante de los objetivos a corto plazo será **diseñar a nivel virtual el cubo de Rubik más grande de la historia**, o, dicho de otro modo, haciendo uso de programas de diseño industrial, crear todas las piezas que formarán el cubo de Rubik con sus tolerancias correspondientes e identificando

siempre posibles puntos críticos por los que las piezas podrían sufrir fracturas devastadoras para el completo funcionamiento del cubo.

- El segundo objetivo será **formalizar la patente del producto y/o la idea de proyecto** o, en caso contrario, justificar porqué la idea o producto no sería patentable.
- Por último, el tercer objetivo será **empezar la fase de preproducción**, la que a grandes rasgos se tratará en empezar a imprimir y a hacer pruebas con la tecnología que más se adapte al proyecto para aplicar posibles rediseños al cubo de Rubik.

Considero que este proyecto es muy importante no solo por el trabajo, la constancia y la dedicación que requiere para llevarlo a cabo, sino también por los conocimientos, contactos y oportunidades que me brinda a mí como máximo responsable de este. Han sido dos intensos años que han requerido decenas de horas delante de la computadora aprendiendo cómo diseñar un cubo de Rubik desde cero, investigar cómo llevar proyectos como este a la luz, cómo reducir fricción entre superficies, cómo aplicar mejoras al proyecto entre otras muchas más cosas. Además, todos los bocetos, dibujos y diseños presentados en este documento (excepto los indicados) son diseños propios hechos con el programa de diseño industrial Fusion 360, hecho que también ha consumido una importante cantidad de tiempo, pero que me ha permitido mostrar y presentar los conceptos de una forma visual y práctica para acompañar y facilitar la lectura del documento.

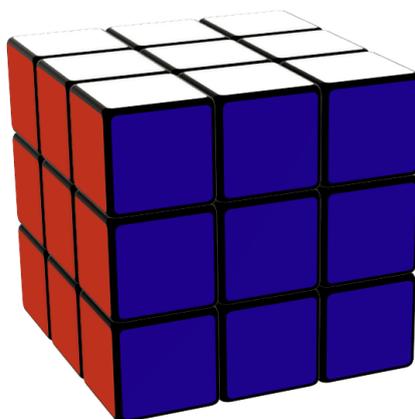
## 2. Parte teórica

### 2.1 La estructura interna del cubo de Rubik

Una de las áreas que más dedicación ha requerido ha sido el estudio de cómo funciona un cubo de Rubik interiormente, pasando por estudiar los cubos más simples hasta llegar a obras de la ingeniería como el cubo de Grégoire Pfennig de 33x33. Es por ello por lo que en este apartado encontraremos una explicación detallada de la estructura y mecánica de los cubos de Rubik.

#### 2.1.1 Mecánica de un cubo de Rubik de 3x3

Primero de todo debemos comprender cómo funciona el cubo de Rubik más simple, conocido y antiguo de todos, el de 3x3. Este cubo está formado por un total de 27 piezas: tiene 6 centros, 8 vértices, 12 aristas y 1 estructura interior central que sujeta los 6 centros desde los que se transmiten las fuerzas aplicadas al cubo para girar todas las piezas.



*Ilustración 1 | Elaboración propia | Vista frontal del cubo*

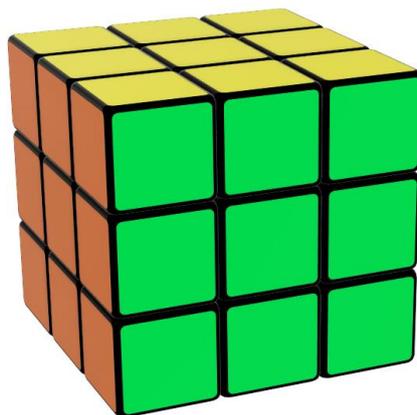


Ilustración 2 | Elaboración propia | Vista posterior del cubo

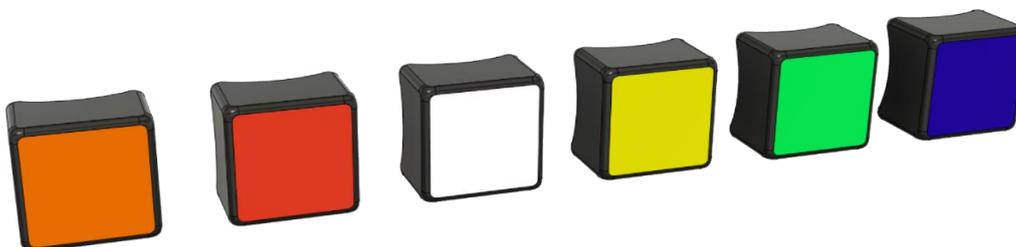


Ilustración 3 | Elaboración propia | Vista frontal de los 6 centros



Ilustración 4 | Elaboración propia | Vista posterior de los 6 centros

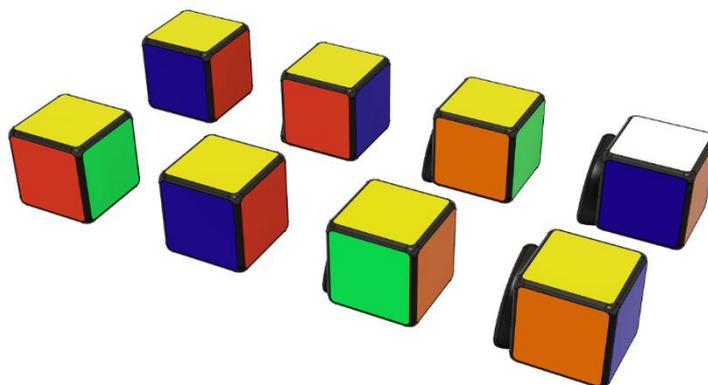


Ilustración 5 | Elaboración propia | Vista frontal de los 8 vértices

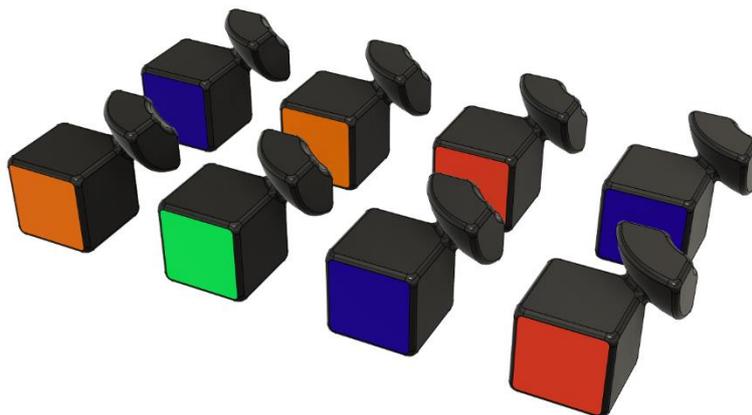


Ilustración 6 | Elaboración propia | Vista posterior de los 8 vértices

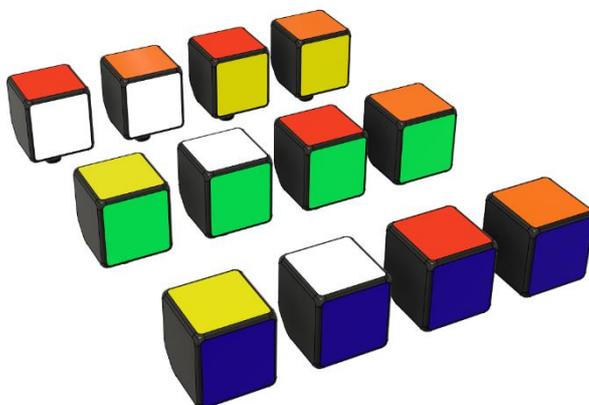
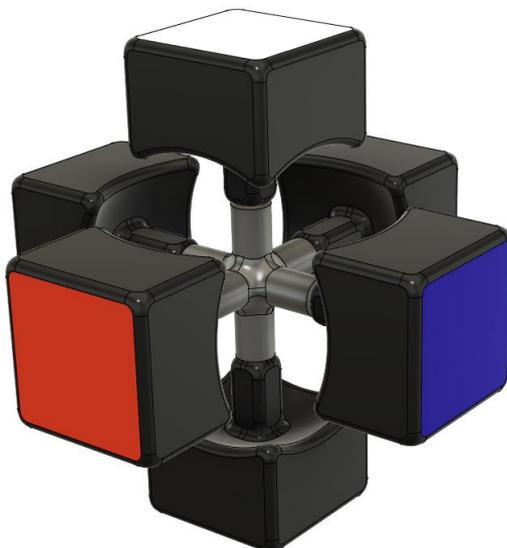


Ilustración 7 | Elaboración propia | Vista frontal de las 12 aristas

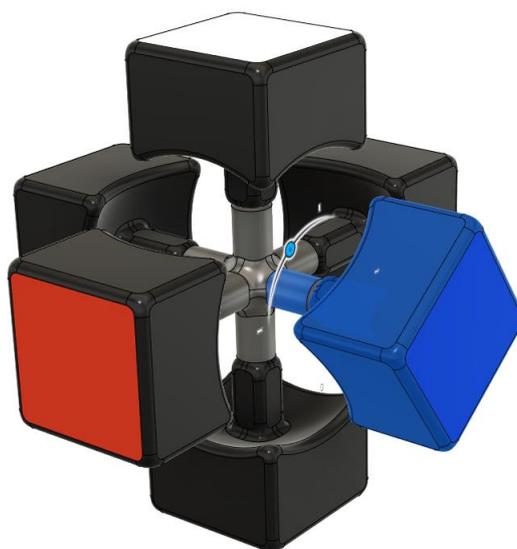


Ilustración 8 | Elaboración propia | Vista posterior de las 12 aristas

Estos 6 centros, unidos a la estructura interior a partir de 1 tornillo y 1 muelle en cada centro, ofrecen un movimiento rotacional, y solamente pueden girar sobre su propio eje tal y como se muestra a continuación.



*Ilustración 9 | Elaboración propia | Vista frontal de los 6 ejes unidos a los 6 centros*



*Ilustración 10 | Elaboración propia | Vista frontal de los 6 ejes en rotación*

Estos centros, unidos a los ejes, son los responsables de que el cubo entero pueda moverse.

Una vez explicada la función de los centros y la estructura interior, debemos comprender cómo se unen el resto de las piezas y por qué una sola pieza puede girar en varios sentidos.

Si hiciéramos un corte transversal justo en la parte media del cubo veríamos una imagen parecida a esta.

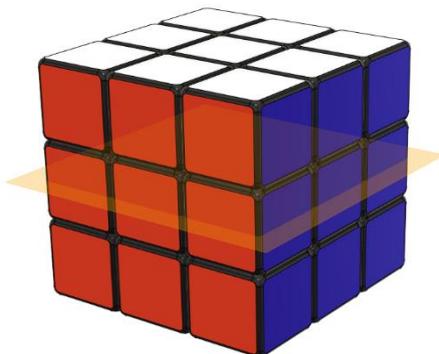


Ilustración 11 | Elaboración propia | Vista frontal del cubo con corte transversal cerrado

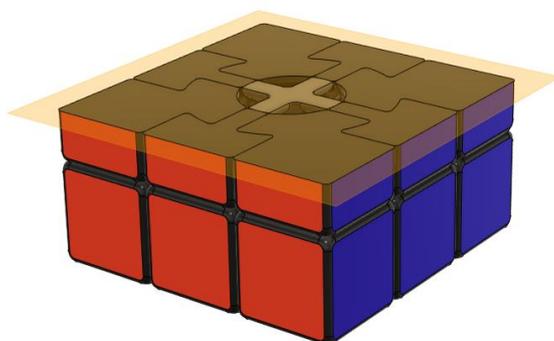


Ilustración 12 | Elaboración propia | Vista frontal del cubo con corte transversal

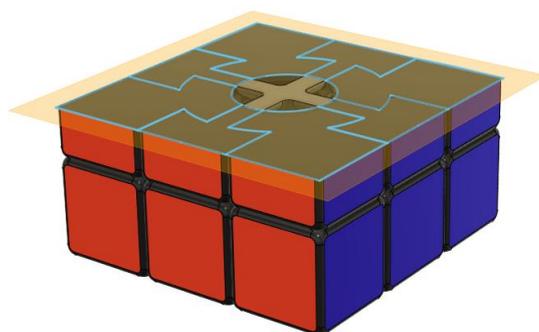


Ilustración 13 | Elaboración propia | Vista frontal del cubo con piezas remarcadas en azul

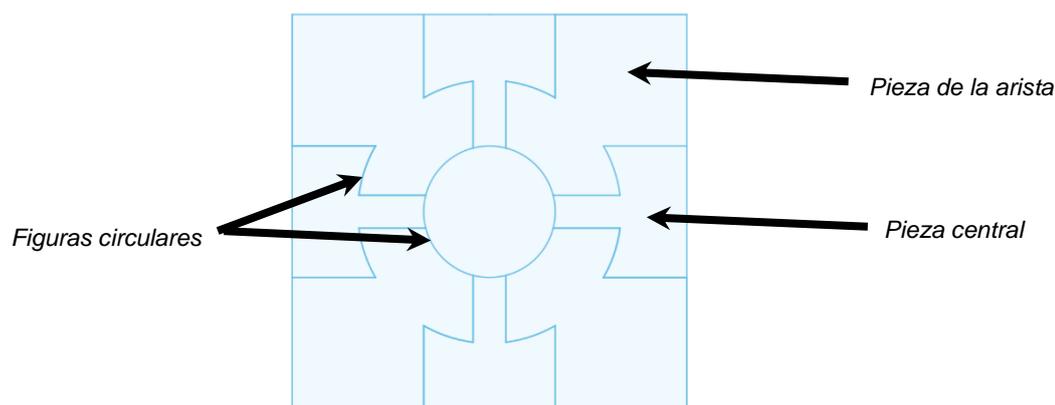


Ilustración 14 | Elaboración propia | Vista superior del corte transversal

Aquí podemos apreciar las piezas centrales<sup>1</sup> y las piezas de la arista<sup>2</sup> que forman el cubo. En la imagen se pueden ver dos figuras circulares<sup>3</sup>, es decir, dos figuras en las que se pueden apreciar dos circunferencias centradas. Es gracias a estas circunferencias que las piezas son capaces de transmitir las fuerzas aplicadas y transformarlas en un movimiento rotacional<sup>4</sup>. Estos cortes son muy importantes ya que a partir de ellos se pueden crear todas las piezas, incluidas las piezas de los vértices<sup>5</sup>.

Por último, aplicaremos una tolerancia<sup>6</sup> entre las piezas para permitir el movimiento entre ellas.

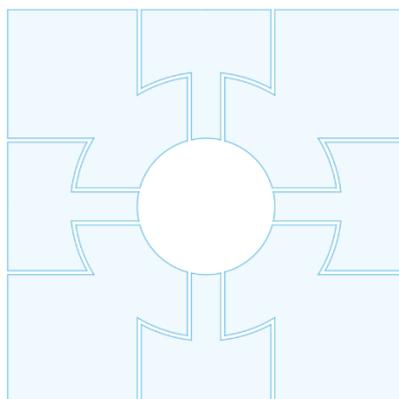


Ilustración 15 | Elaboración propia | Corte transversal con tolerancia entre las piezas

<sup>1</sup> Piezas centrales: Piezas que se encuentran en el centro del cubo. Terminología propia del estudio.

<sup>2</sup> Piezas de la arista: Piezas que se encuentran en las aristas del cubo. Terminología propia del estudio.

<sup>3</sup> Figuras circulares: Circunferencias propias del diseño del cubo. Terminología propia del estudio.

<sup>4</sup> Movimiento rotacional: Movimiento rotatorio alrededor de un eje fijo.

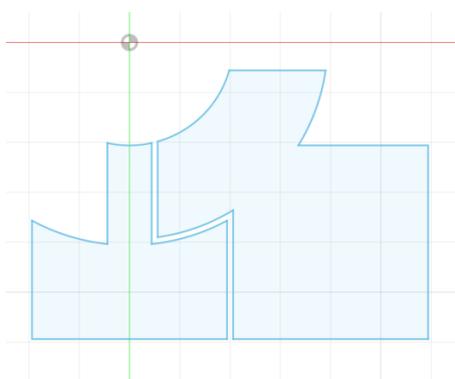
<sup>5</sup> Piezas de los vértices: Piezas que se encuentran en los vértices del cubo. Terminología propia.

<sup>6</sup> Tolerancia: Holgura o separación mínima que debemos aplicar entre piezas para que estas puedan moverse entre sí.

## 2.1.2 Diseño de un cubo de Rubik de 3x3

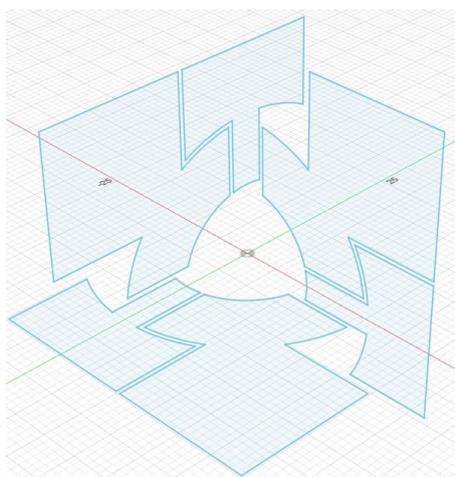
Para crear este plano desde 0 tendremos en cuenta que la pieza central debe sujetar el resto de piezas, es decir, la pieza central, al ser la única unida al cubo con tornillos, debe sujetar por dentro todo el resto de piezas como podemos apreciar en la siguiente imagen. Además, al plano le aplicaremos la tolerancia entre piezas deseada.

En la anterior imagen (véase *Ilustración 14*) podemos diferenciar dos tipos de piezas: la central y la de la arista. Es por ello que solamente conservaremos una copia de estas piezas ya que el resto no serán de ninguna utilidad.



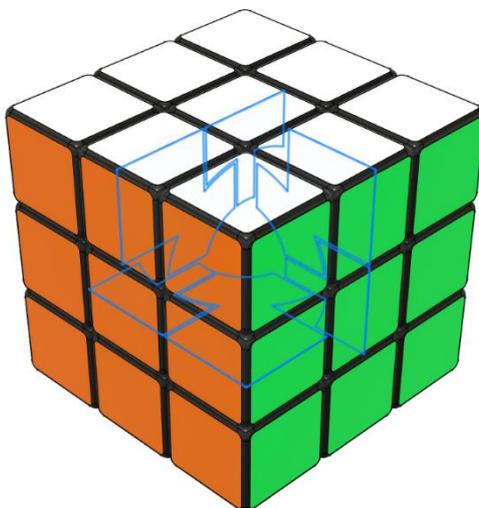
*Ilustración 16 | Elaboración propia | Corte transversal manteniendo una de cada pieza única*

Además, aplicaremos también este plano en los 3 ejes, X, Y y Z. Este sería el resultado.

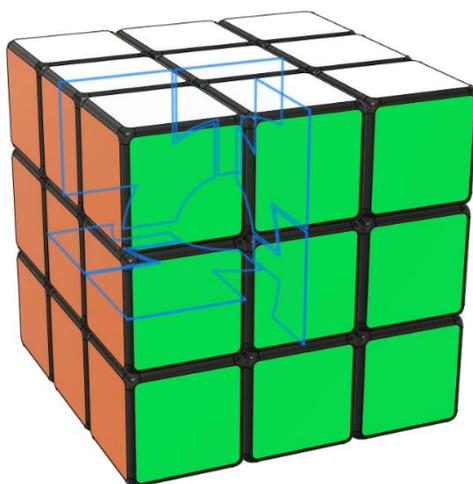


*Ilustración 17 | Elaboración propia | Piezas únicas replicadas en los 3 ejes*

Para comprender exactamente qué parte del cubo forman estos 3 planos los aplicaremos a anteriores imágenes para apreciar mejor su origen.



*Ilustración 18 | Elaboración propia | Piezas únicas comparadas con la vista posterior del cubo*



*Ilustración 19 | Elaboración propia | Ilustración 18 desde un distinto ángulo*

En las próximas imágenes podemos darnos cuenta de que las aristas y centros forman los ejes de rotación.

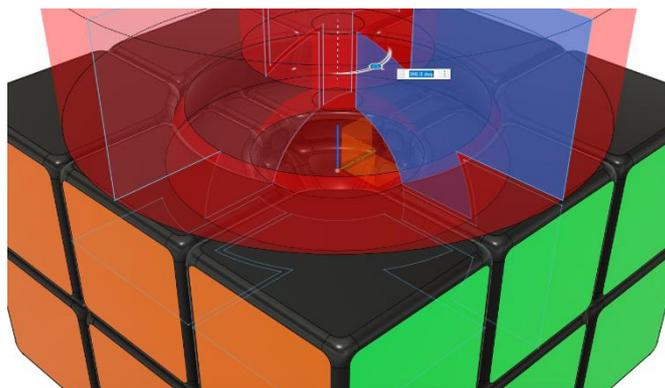


Ilustración 20 | Elaboración propia | Representación de la pieza de la arista actuando como eje de rotación

Así mismo, apreciamos como los ejes dibujados no conectan con el extremo de los vértices (representado con el valor X). Es por ello que alargamos la cabeza de la arista haciendo uso de la regla de Pitágoras.

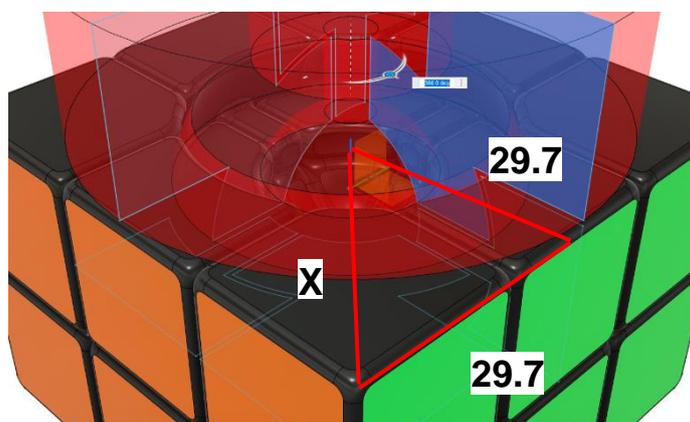


Ilustración 21 | Elaboración propia | Aplicación de Pitágoras en Ilustración 20

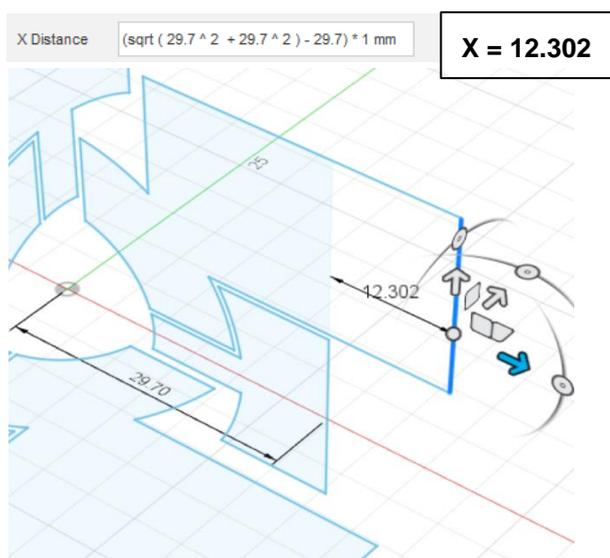


Ilustración 22 | Elaboración propia | Aplicación de Pitágoras en Ilustración 17

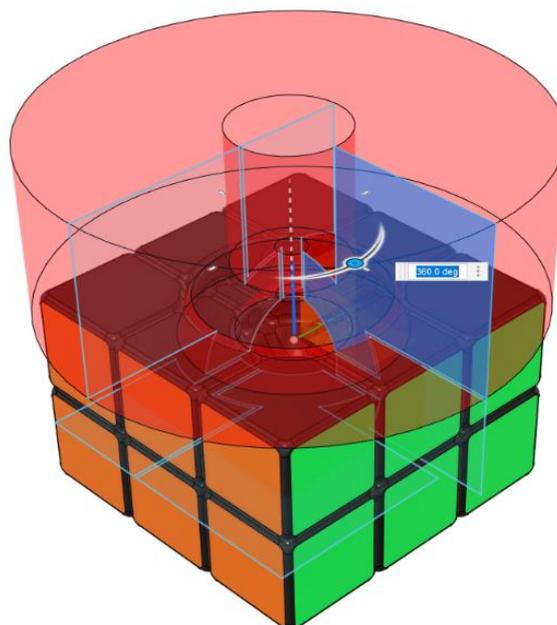


Ilustración 23 | Elaboración propia | Ilustración 20 con Pitágoras aplicado

Una vez comprendemos este concepto podemos empezar a crear todas las piezas. Primero de todo crearemos un rectángulo de 60 x 30 mm (lo hacemos de 60 x 30 mm debido a que el cubo tiene unas dimensiones de 60 x 60 x 60 mm, y el rectángulo debe ser de la medida total del cubo x la mitad de la medida del cubo, es decir,  $60 \times 60/2 \text{ mm} = 60 \times 30 \text{ mm}$ ). Además, eliminaremos las dos piezas del eje Z ya que no son necesarias para crear las piezas.

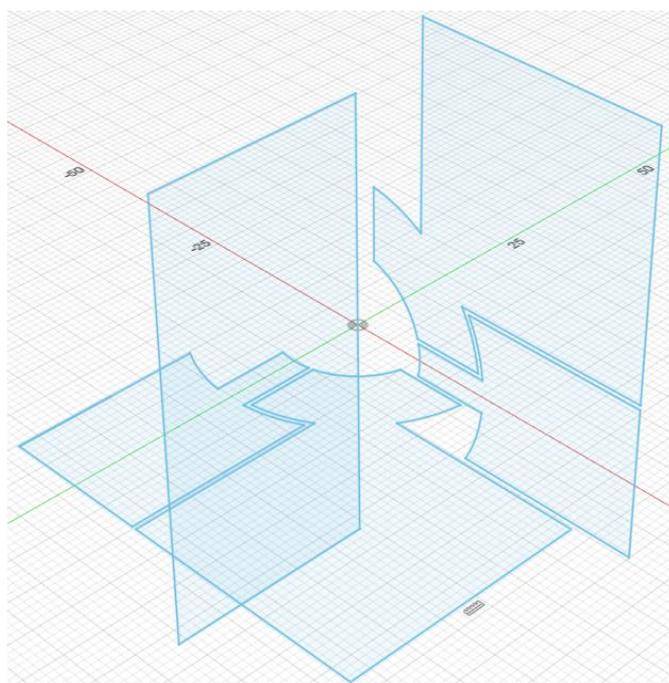
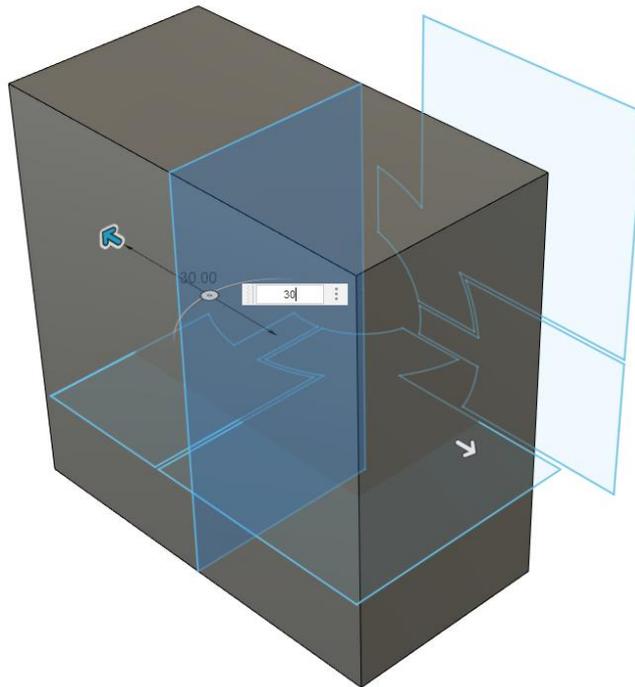


Ilustración 24 | Elaboración propia | Ilustración 22 con rectángulo de 60 x 30 mm.

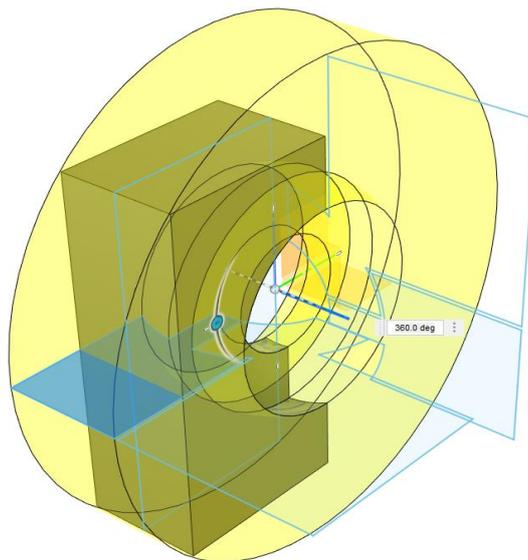
A continuación, ampliaremos este cubo a las 3D en 30 mm por lado.



*Ilustración 25 | Elaboración propia | Ilustración 24 con ampliación del rectángulo en 30 mm por lado*

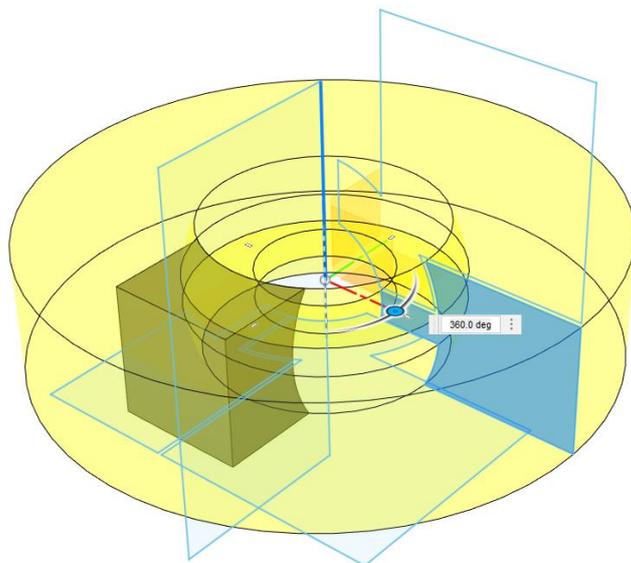
Para crear las 3 distintas piezas realizaremos los siguientes pasos:

Para crear la pieza central cortaremos el cubo haciendo rotar la pieza central del plano sobre el eje contrario como se muestra a continuación.



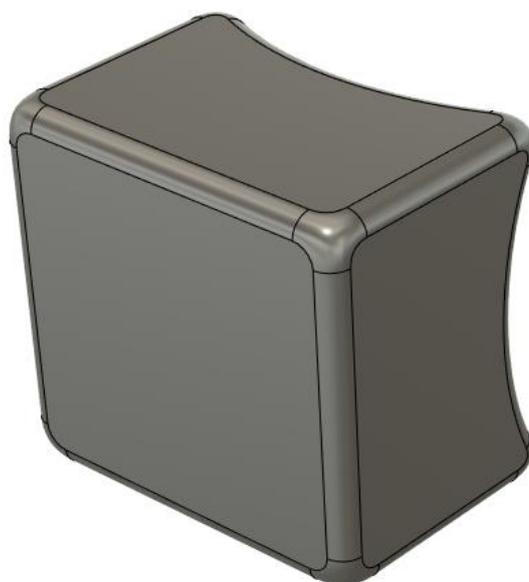
*Ilustración 26 | Elaboración propia | Primer paso para crear la pieza central*

Después cortaremos la pieza central del plano en el eje Z.



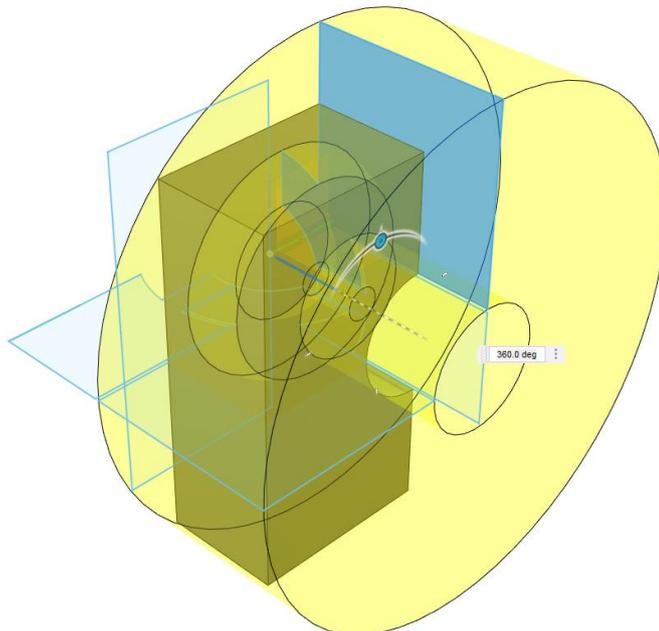
*Ilustración 27 | Elaboración propia | Segundo paso para crear la pieza central*

Estos dos pasos serían los necesarios para crear la pieza central del cubo. Más adelante deberán aplicarse los agujeros centrales para unir la pieza con la estructura interior y colorear la pieza, pero, debido a que este paso no requiere de ninguna complejidad, no se explicará detalladamente en este documento. Este sería el resultado final con las esquinas redondeadas.



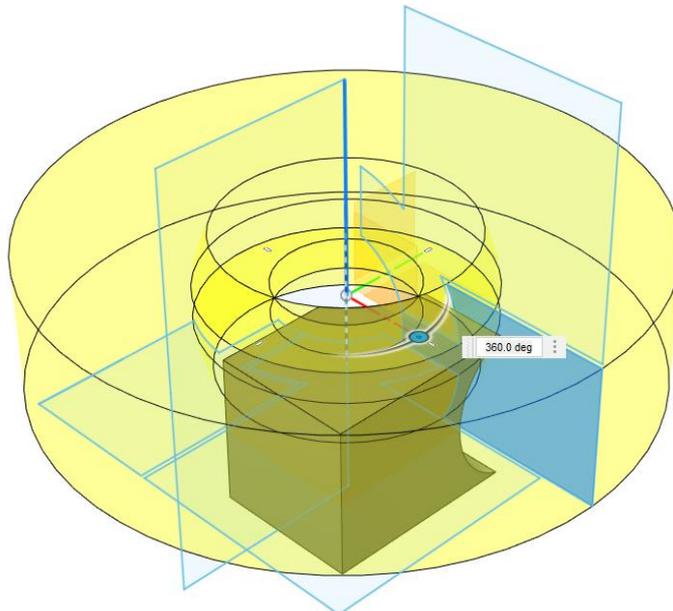
*Ilustración 28 | Elaboración propia | Vista frontal de la pieza central con las esquinas redondeadas*

Para crear la pieza de la arista cortaremos el cubo haciendo rotar la pieza de la arista del plano como se muestra a continuación.



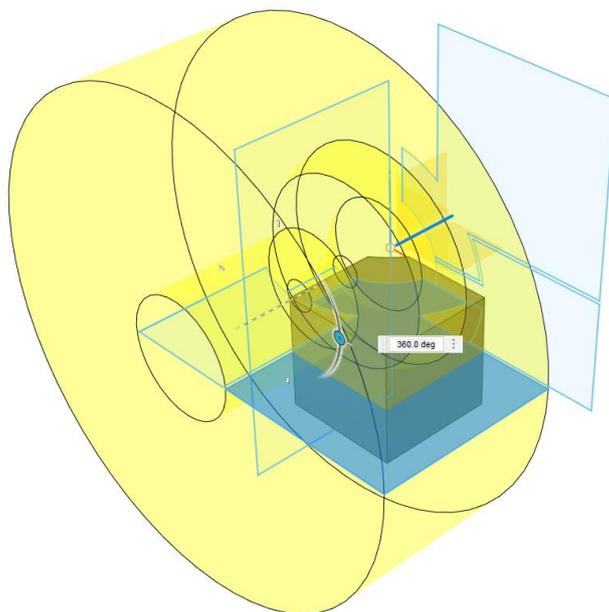
*Ilustración 29 | Elaboración propia | Primer paso para crear la pieza de la arista*

Después aplicaremos otro corte con la pieza central del plano en el eje Z.



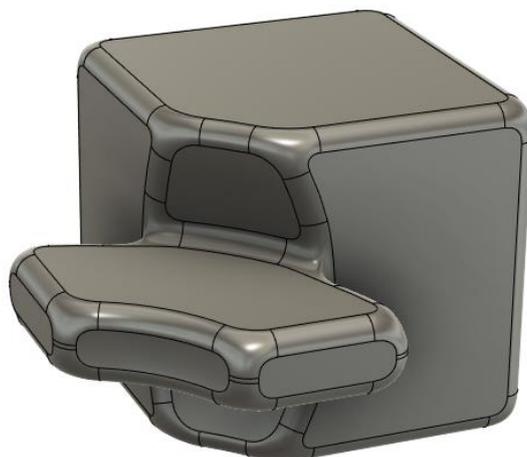
*Ilustración 30 | Elaboración propia | Segundo paso para crear la pieza de la arista*

Por último, aplicaremos un corte con la pieza de la arista como se muestra a continuación.



*Ilustración 31 | Elaboración propia | Tercer paso para crear la pieza de la arista*

Este sería el resultado final de la pieza de la arista con las esquinas redondeadas y sin colorear.



*Ilustración 32 | Elaboración propia | Vista posterior de la pieza de la arista con las esquinas redondeadas*

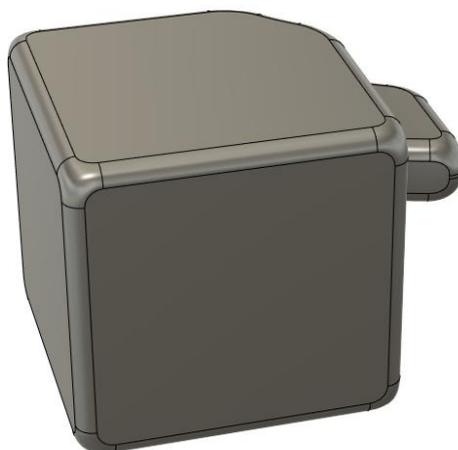


Ilustración 33 | Elaboración propia | Vista frontal de la pieza de la arista con las esquinas redondeadas

Para crear la pieza del vértice cortaremos el cubo haciendo rotar la pieza de la arista del plano como se muestra a continuación.

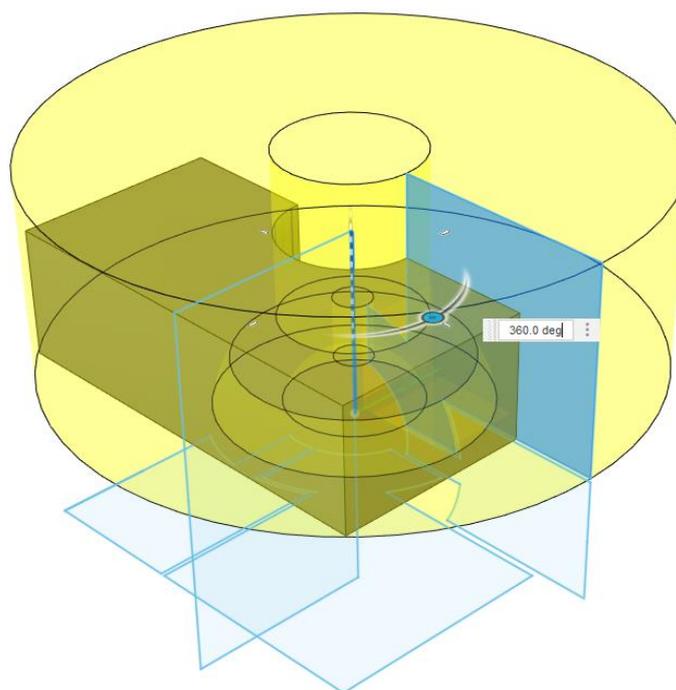
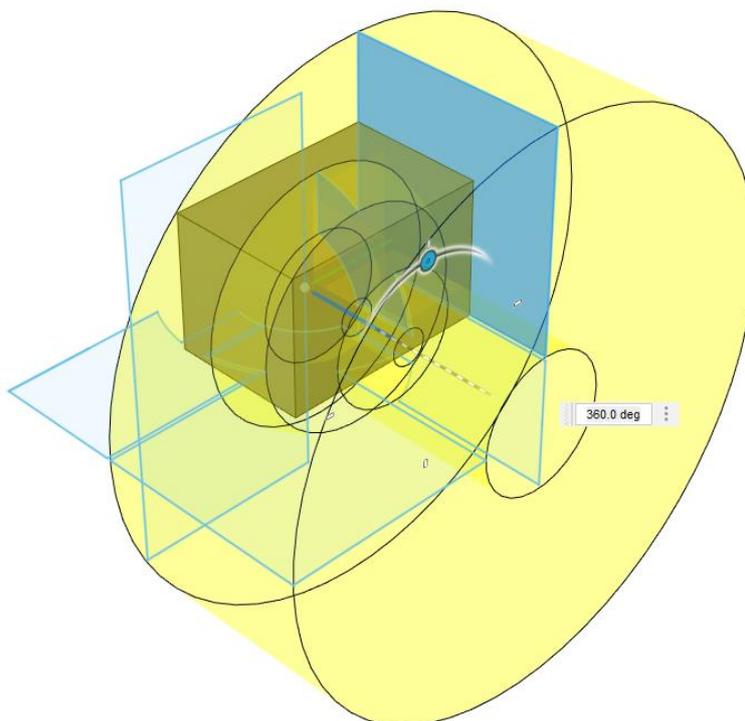


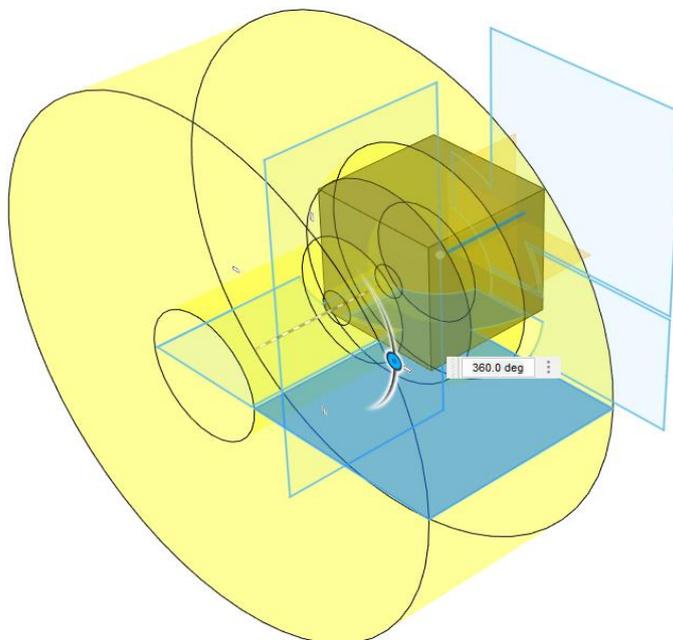
Ilustración 34 | Elaboración propia | Primer paso para crear la pieza del vértice

Después aplicaremos otro corte con la pieza de la arista del plano en el eje Z.



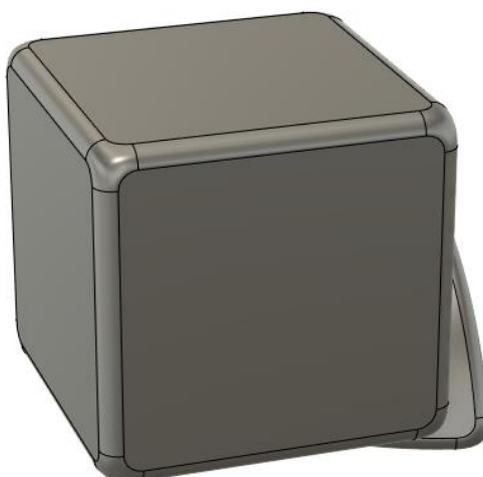
*Ilustración 35 | Elaboración propia | Segundo paso para crear la pieza del vértice*

Por último, aplicaremos un corte con la pieza de la arista del plano como se muestra a continuación.

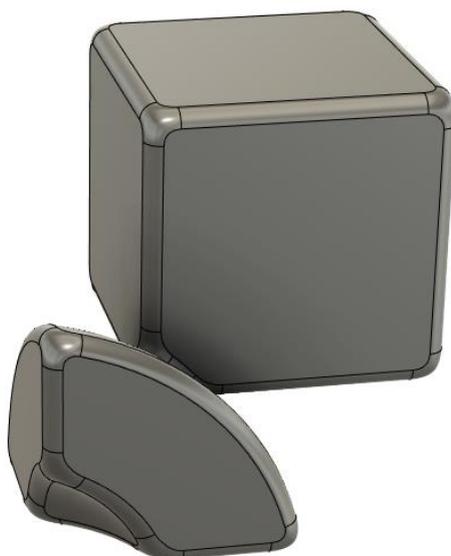


*Ilustración 36 | Elaboración propia | Tercer paso para crear la pieza del vértice*

Este sería el resultado final de la pieza del vértice con las esquinas redondeadas y sin colorear.



*Ilustración 37 | Elaboración propia | Vista frontal de la pieza del vértice con las esquinas redondeadas*



*Ilustración 38 | Elaboración propia | Vista posterior de la pieza del vértice con las esquinas redondeadas*

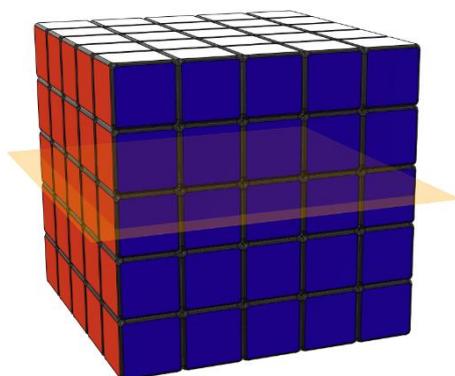
### 2.1.3 ¿Por qué el cubo de Rubik tiene un número impar de piezas?

Una vez explicado este proceso de creación de las piezas de un cubo podemos pasar a explicar cómo un cubo de mayor tamaño se mantiene fijo teniendo la misma cantidad de centros, es decir, 6. Antes de ello, pero, debemos comprender por qué es mucho más simple diseñar un cubo de Rubik con un número de piezas impar que

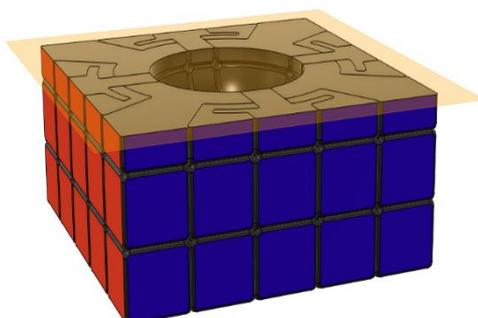
par, y por qué en este documento solamente nos centraremos en la mecánica de los cubos de Rubik impares.

Los cubos de Rubik siempre deben tener un centro, un punto fijo que permita hacer girar las piezas. En el caso de los cubos de Rubik impares siempre habrá una pieza en el centro, en cambio, los cubos de Rubik pares no tienen ninguna pieza central, sino que en el centro encontramos 4 esquinas de 4 distintas piezas. El método en este caso es crear un centro interior, en otras palabras, la pieza central está escondida por debajo de las piezas que vemos en el exterior. Esto significa que un cubo de 4x4 realmente es un cubo de 5x5 con las piezas centrales escondidas en el interior del cubo. Esto resulta en un cubo mucho más complejo mecánicamente requiriendo piezas muy pequeñas. Al tratar de diseñar un cubo con muchas piezas es altamente recomendable decantarse por la vía simple, es decir, por un cubo con un número de piezas impar.

Es por todo esto que en este documento solamente hablaremos y analizaremos cubos de Rubik impares como el 3x3, el 5x5 o el 7x7 entre otros.



*Ilustración 39 | Elaboración propia | Ilustración de un cubo de 5x5 con un corte transversal*

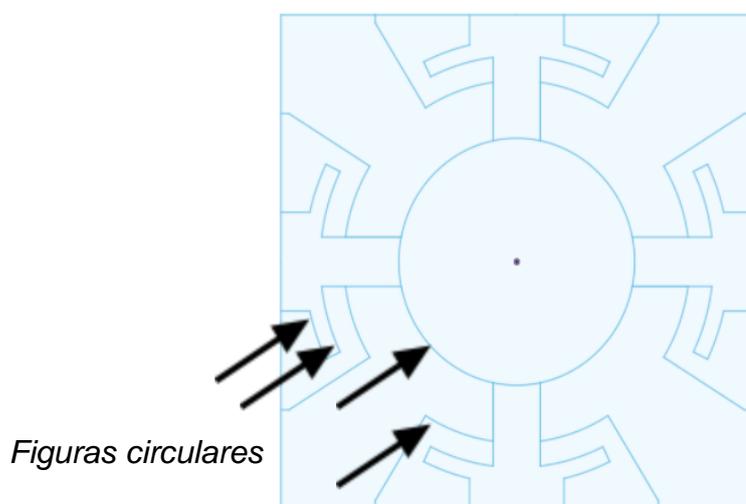


*Ilustración 40 | Elaboración propia | Ilustración del corte transversal de un 5x5*

### 2.1.4 Mecánica de un cubo de Rubik de 5x5

La metodología requerida para crear cubos de Rubik impares mayores del 3x3 es muy similar. En el caso de diseñar un cubo de 5x5, es decir, el siguiente tamaño después del 3x3, la metodología a seguir es la siguiente:

Primero de todo, pasaremos a ver su corte transversal (véase *Ilustración 40*) para conocer su mecánica de unión de piezas y analizar las similitudes con el cubo de Rubik de 3x3.

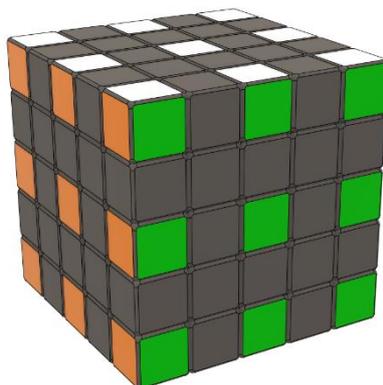


*Ilustración 41 | Elaboración propia | Vista superior del corte transversal del cubo de 5x5*

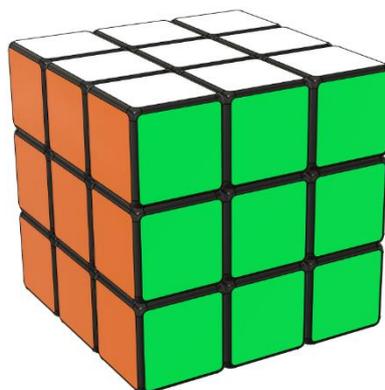
En la anterior imagen podemos observar los 4 centros, las 4 aristas y 8 piezas entre centro y arista. Estas 8 piezas de más (2 por lado) hacen que el cubo sea de 5x5 en vez de 3x3. Podemos apreciar como las piezas centrales llegan hasta la parte interior del cubo para poder unirse a la estructura a partir de tornillos. Además, podemos observar un total de 4 figuras circulares centradas (señalizadas con flechas negras). Por último, vemos como la pieza entre la pieza central y la pieza de la arista (a partir de ahora la llamaremos pieza intermedia) se abraza a la pestaña que sobresale de la pieza central. Así mismo, la pieza de la arista se adentra también hasta el interior del cubo escondiéndose por detrás de la pieza intermedia y la pieza central para así poder ser sujeta. Gracias a este sistema el cubo se mantiene unido y las piezas pueden girar libremente alrededor del mismo.

Antes de empezar a crear las piezas del cubo de 5x5 debemos reconocer cuáles de ellas son las mismas que en el cubo de 3x3 y cuáles de ellas son nuevas piezas.

Con la siguiente imagen las podemos identificar.



*Ilustración 42 | Elaboración propia | Cubo de 5x5 con piezas nuevas descoloridas*



*Ilustración 43 | Elaboración propia | Cubo de 3x3*

En la imagen superior podemos ver las nuevas piezas del cubo descoloridas y las piezas que coinciden con las del cubo de 3x3 coloridas. En total tenemos 8 nuevas piezas que rodean el centro y 1 pieza entre arista y vértice, las anteriormente llamadas piezas intermedias.

Además, observamos que las 8 piezas que rodean el centro pueden comportarse todas unidas como un centro, o, dicho de otro modo, las 9 piezas son un centro cortado en 9 partes iguales.

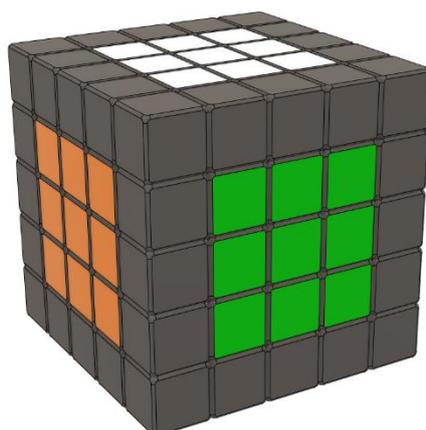


Ilustración 44 | Elaboración propia | Cubo de 5x5 con piezas que forman el centro coloridas

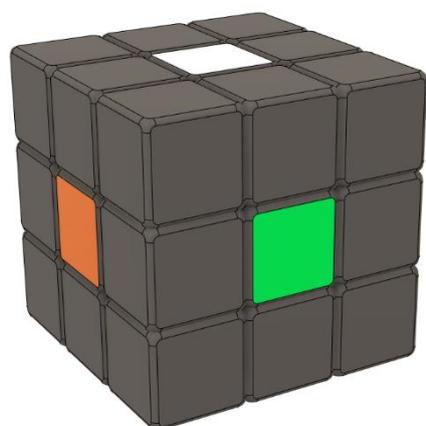


Ilustración 45 | Elaboración propia | Cubo de 3x3 con pieza central colorida

Así mismo, observamos que las piezas de la arista juntamente con las piezas intermedias forman una pieza de la arista cortada en 3 partes iguales.

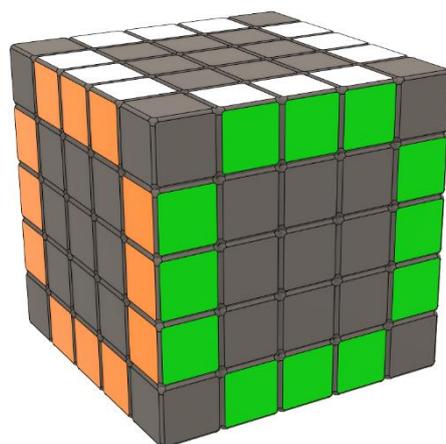
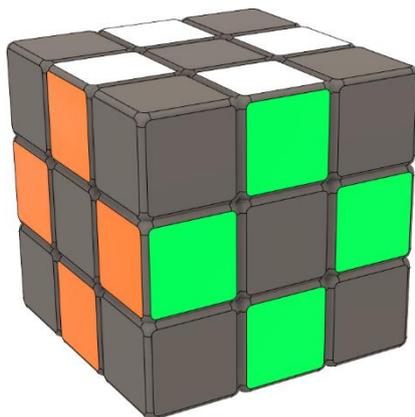
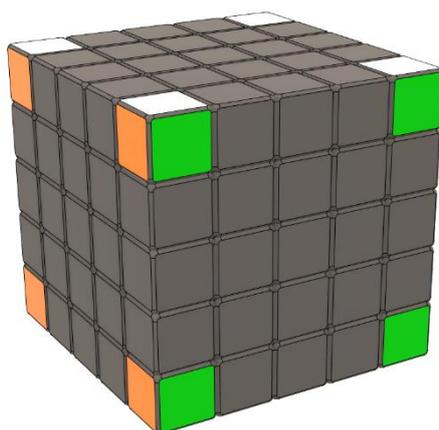


Ilustración 46 | Elaboración propia | Cubo de 5x5 con las piezas que forman la arista coloridas

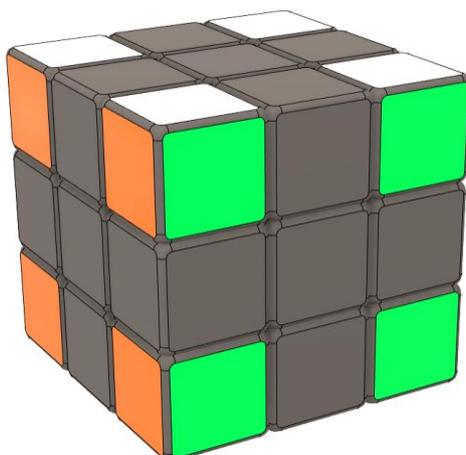


*Ilustración 47 | Elaboración propia | Cubo de 3x3 con las piezas de la arista coloridas*

Por último, apreciamos que la pieza de la arista es la única pieza que no sufre modificaciones ni cortes, regla que se mantendrá en todos los cubos de Rubik sin importar su tamaño ni cantidad de piezas.



*Ilustración 48 | Elaboración propia | Cubo de 5x5 con piezas de los vértices coloridas*



*Ilustración 49 | Elaboración propia | Cubo de 3x3 con piezas de los vértices coloridas*

## 2.1.5 Diseño de un cubo de Rubik de 5x5

Para diseñar las piezas del cubo repetiremos la metodología aplicada en el cubo de 3x3.

Primero de todo, nos quedaremos con una copia de cada pieza que aparece en el plano anterior (Ilustración 41) y le ampliaremos sus laterales siguiendo la regla de Pitágoras.

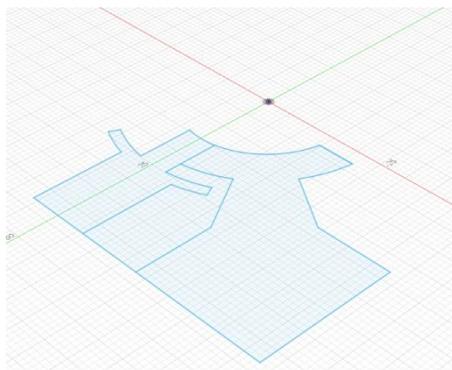


Ilustración 50 | Elaboración propia | Corte transversal manteniendo una de cada pieza única

A continuación, le aplicaremos una tolerancia entre piezas.

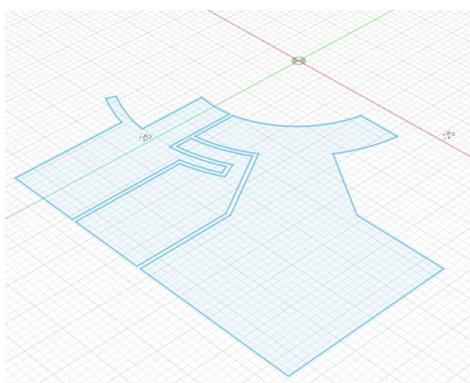


Ilustración 51 | Elaboración propia | Ilustración 50 con tolerancia aplicada

Por último, duplicaremos el mismo plano en el eje de la Z y, por último, crearemos un rectángulo de 60 x 30 mm (el cubo en este caso mide un total de 60 x 60 x 60 mm y el rectángulo, como explicamos en el cubo de 3x3, debe ser de la medida total del cubo x la mitad de la medida total del cubo, o sea,  $60 \times 60/2 \text{ mm} = 60 \times 30 \text{ mm}$ ).

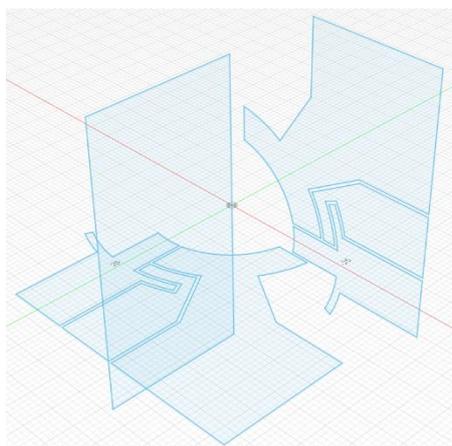


Ilustración 52 | Elaboración propia | Ilustración 51 replicada en dos ejes con rectángulo de 60 x 30 mm

Solamente explicaremos los pasos a seguir para crear las nuevas piezas del cubo de 5x5 respecto al cubo de 3x3 como se mostraba en la Ilustración 42.

Para crear uno de los dos tipos de piezas que forman las 8 piezas que rodean el centro y que se encuentra justo en los laterales de la pieza central (pieza subcentral<sup>7</sup>) deberemos seguir los siguientes pasos:

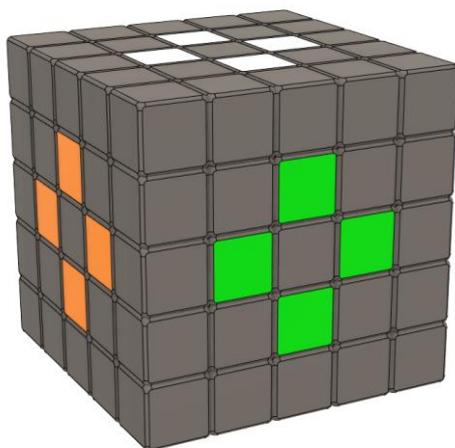


Ilustración 53 | Elaboración propia | Piezas subcentrales coloreadas

---

<sup>7</sup> Pieza subcentral: Pieza que se encuentra en los laterales de la pieza central. Terminología propia

Primer paso:

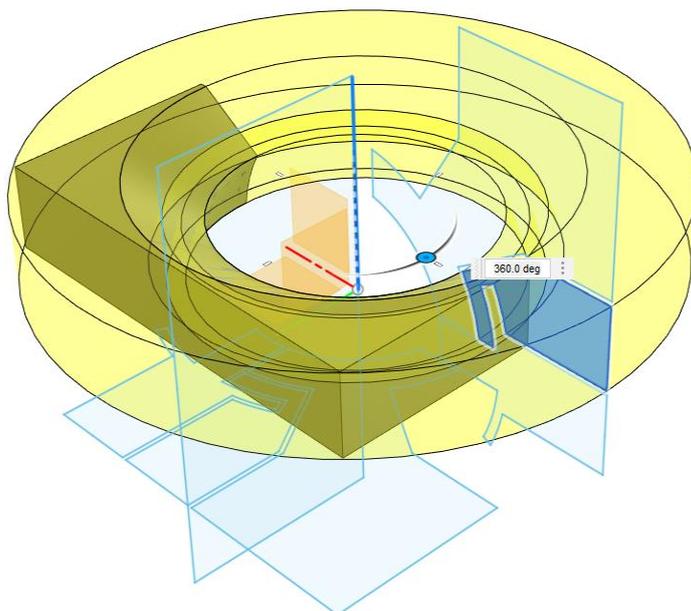


Ilustración 54 | Elaboración propia | Primer paso para crear la pieza subcentral

Segundo paso:

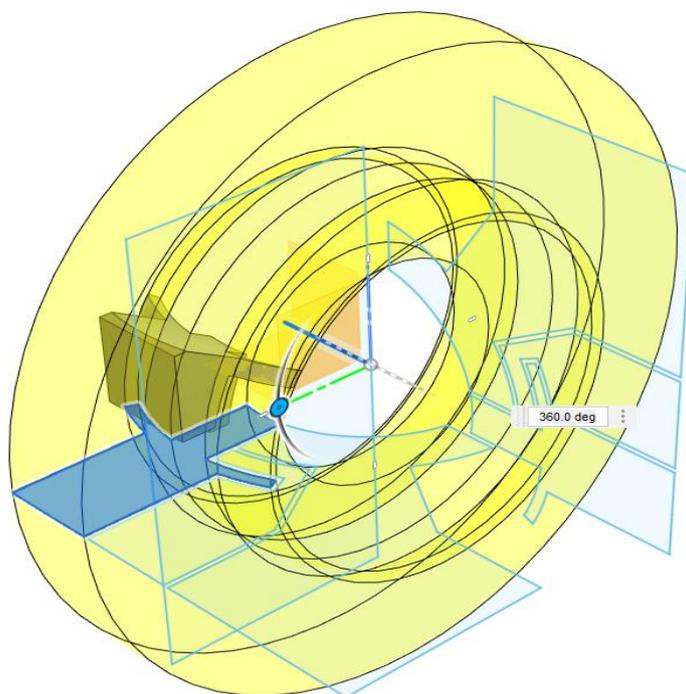
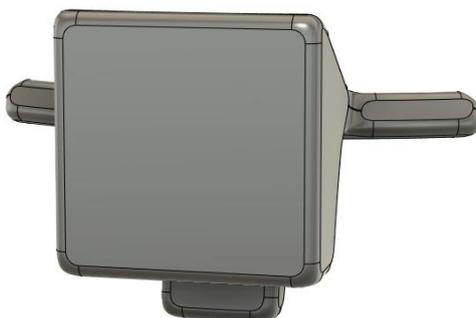
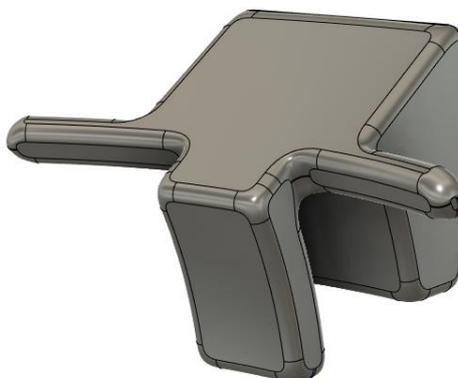


Ilustración 55 | Elaboración propia | Segundo paso para crear la pieza subcentral

Este sería el resultado:

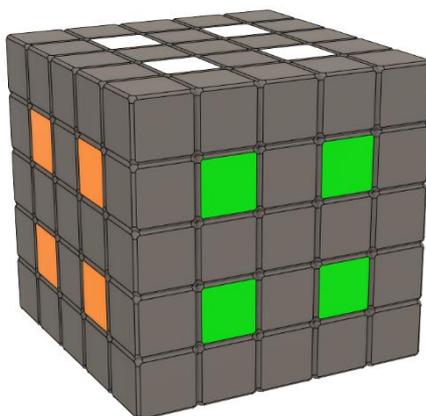


*Ilustración 56 | Elaboración propia | Vista frontal de la pieza subcentral*



*Ilustración 57 | Elaboración propia | Vista posterior de la pieza subcentral*

Para crear el otro tipo de pieza que forma las 8 piezas que rodean el centro y que se encuentra justo en las esquinas de la pieza central (pieza descentral<sup>8</sup>) deberemos seguir los siguientes pasos:

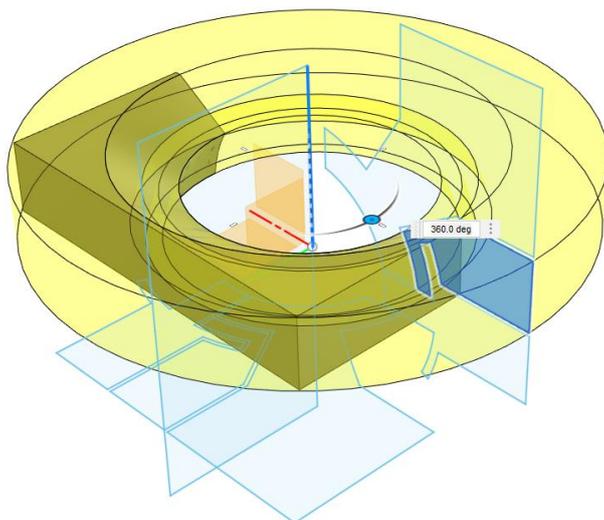


*Ilustración 58 | Elaboración propia | Piezas descentrales coloridas*

---

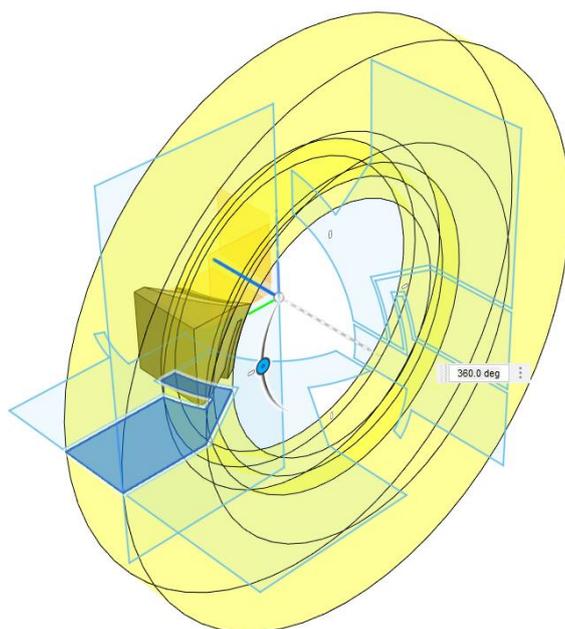
<sup>8</sup> Pieza descentral: Pieza que se encuentra en las esquinas de la pieza central. Terminología propia

Primer paso:



*Ilustración 59 | Elaboración propia | Primer paso para crear la pieza descentral*

Segundo paso:

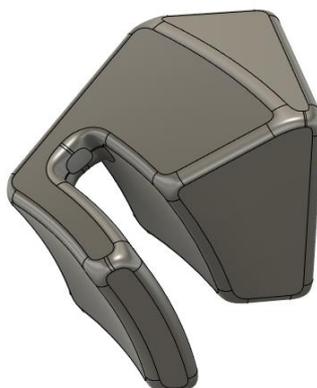


*Ilustración 60 | Elaboración propia | Segundo paso para crear la pieza descentral*

Este sería el resultado:

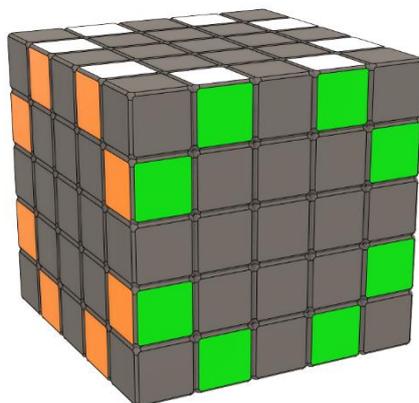


*Ilustración 61 | Elaboración propia | Vista frontal de la pieza descentral*



*Ilustración 62 | Elaboración propia | Vista posterior de la pieza descentral*

Por último, estos serían los pasos para crear la pieza que se encuentra entre las aristas y los vértices (pieza intermedia<sup>9</sup>).



*Ilustración 63 | Elaboración propia | Piezas intermedias coloridas*

---

<sup>9</sup> Pieza intermedia: Pieza que se encuentra entre las aristas y los vértices. Terminología propia

Primer paso:

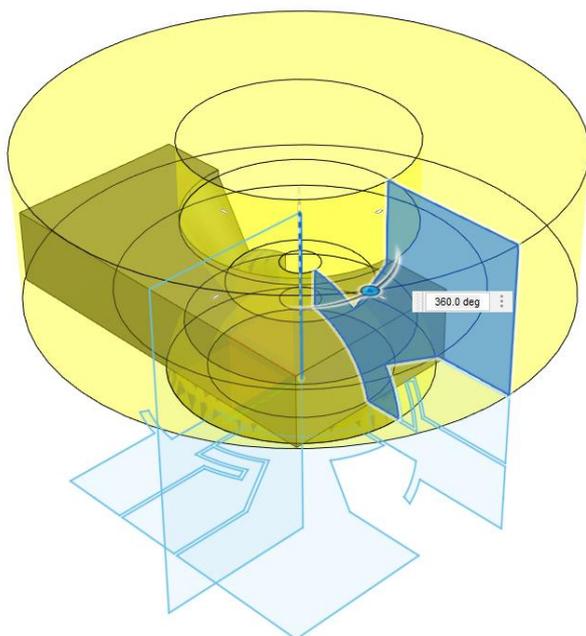


Ilustración 64 | Elaboración propia | Primer paso para crear la pieza intermedia

Segundo paso:

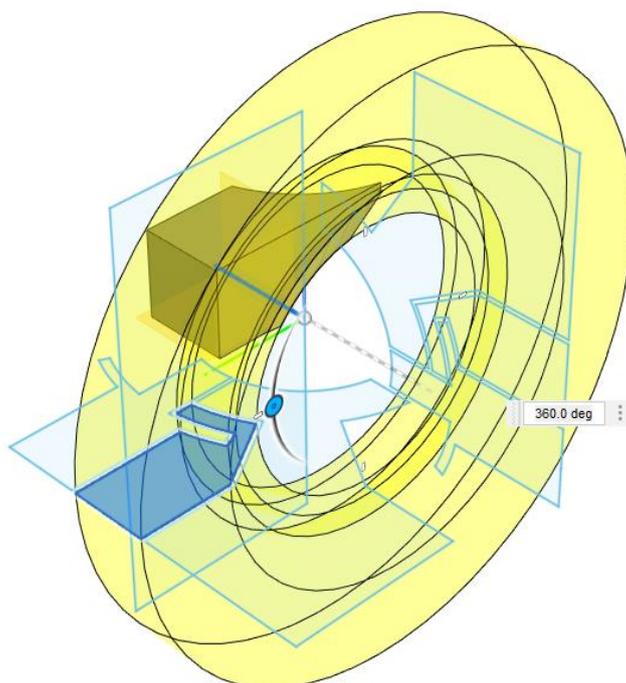


Ilustración 65 | Elaboración propia | Segundo paso para crear la pieza intermedia

Tercer paso:

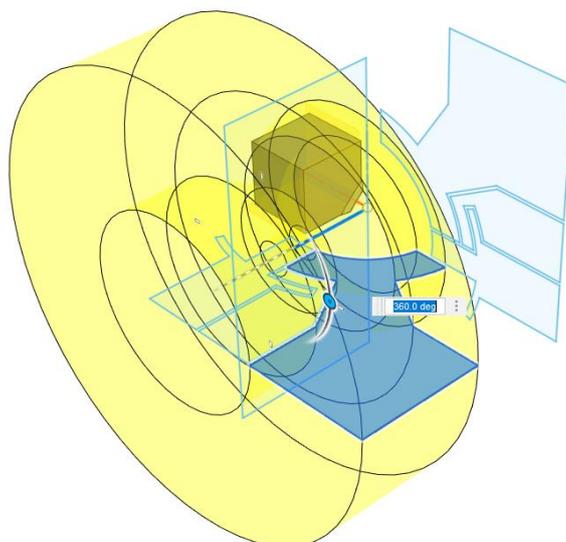


Ilustración 66 | Elaboración propia | Tercer paso para crear la pieza intermedia

Este sería el resultado:

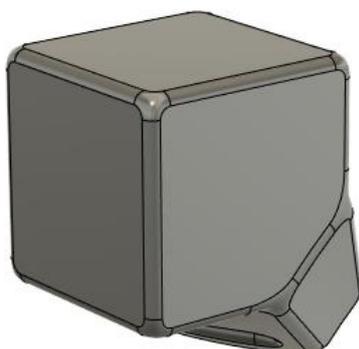


Ilustración 67 | Elaboración propia | Vista frontal de la pieza subcentral

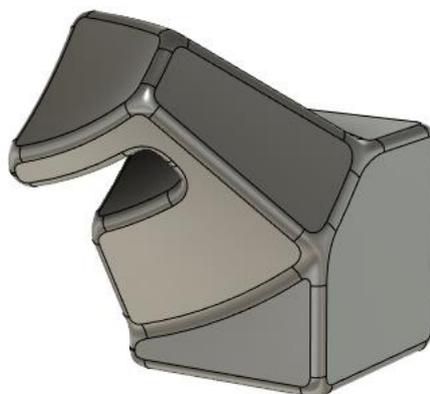


Ilustración 68 | Elaboración propia | Vista posterior de la pieza subcentral

## 2.1.6 ¿Por qué los cubos de Rubik mayores de 5x5 son teóricamente imposibles de diseñar?

Los cubos de Rubik a partir del cubo de 7x7 tienen una característica muy especial: técnicamente son imposibles de crear, por lo menos sin aplicar modificaciones.

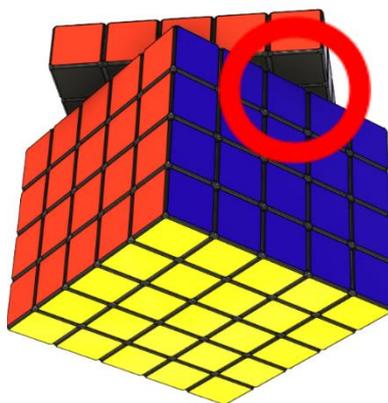


Ilustración 69 | Elaboración propia | Cubo de 5x5 con vértice rodeado

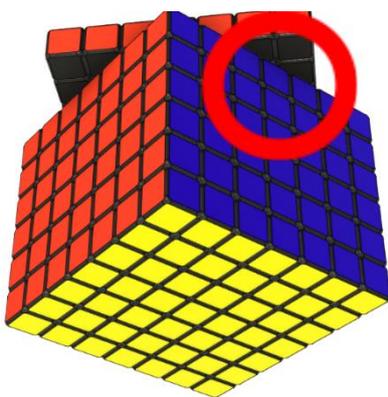


Ilustración 70 | Elaboración propia | Cubo de 7x7 con vértice rodeado



Ilustración 71 | Elaboración propia | Muestra de una pieza del vértice

En el cubo de 5x5 podemos ver cómo la esquina interior de la pieza del vértice, señalizada con un círculo rojo, se mantiene en la parte interior del cubo. Gracias a ello la esquina puede unirse al cubo con una pata que se extiende hasta llegar al interior. De lo contrario, la esquina de la pieza de la esquina del cubo de 7x7 sobresale al exterior y se imposibilita el poder unirse al cubo con una extensión, por lo que caería al suelo.

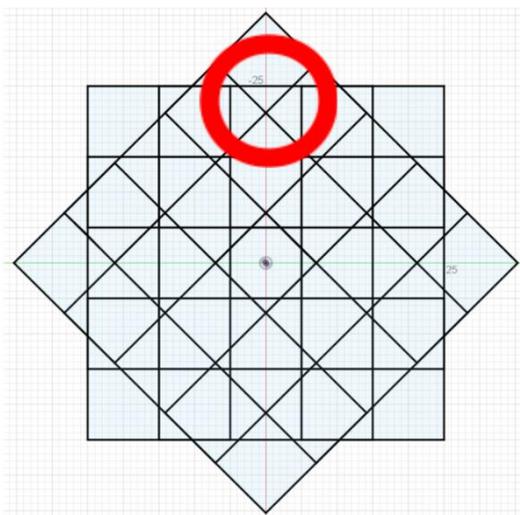


Ilustración 72 | Elaboración propia | Corte transversal de 5x5 con esquina rodeada

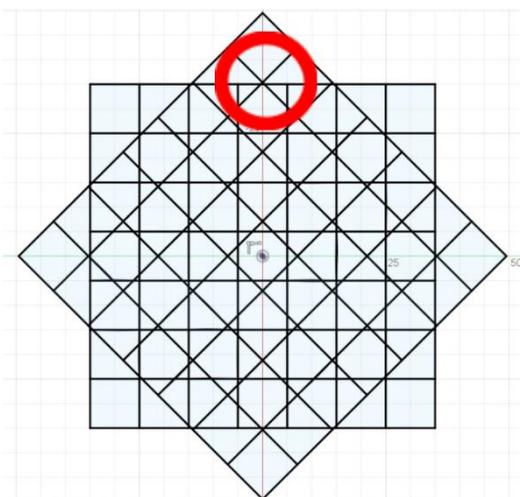


Ilustración 73 | Elaboración propia | Corte transversal de 7x7 con esquina rodeada

Este simple problema requiere una simple solución: Ampliar las piezas de los laterales.

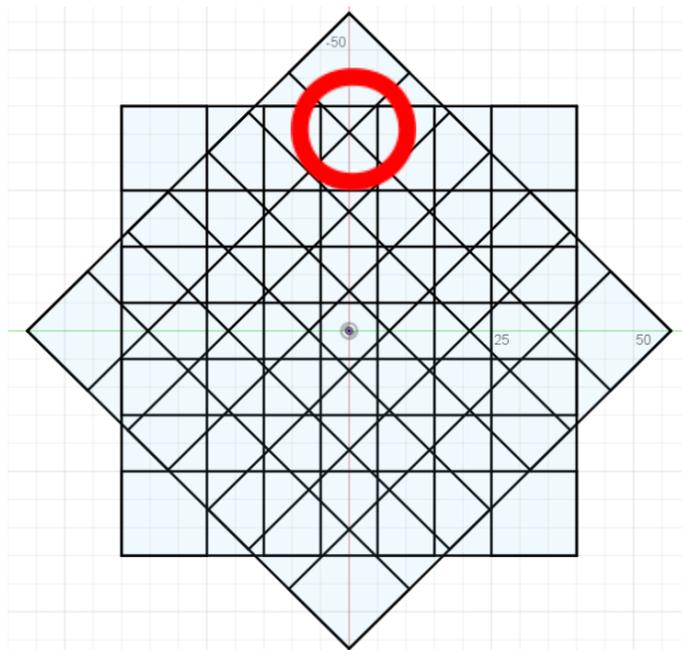


Ilustración 74 | Elaboración propia | Corte transversal de 7x7 con laterales ampliados y esquina rodeada

Esta sería la solución. Si nos fijamos, las piezas que se encuentran en el exterior del cubo son más grandes. Es gracias a ello que, tal y como señala el círculo rojo, la esquina interior de la pieza de la esquina queda escondida dentro del cubo para poder unirse a él. Este incremento del tamaño de las piezas del exterior se calcula con la fórmula que hemos desarrollado:

$$x = f(n, l) > \frac{n-2}{2} l \sqrt{2} - \frac{n-2}{2} l$$

Fórmula 1 | Elaboración propia | Ecuación para calcular aumento de los laterales de los cubos de Rubik mayores de 5x5

Dónde  $n$  = número de piezas por lado (Ej. 7x7  $n = 7$ ) y  $l$  = longitud del costado de las piezas centrales.  $x$  debería ser varios milímetros mayor del resultado ya que si no el eje de unión se vería altamente expuesto a la rotura y la torsión de este.

## 2.1.7 La maravilla detrás de la creación del cubo de Rubik más grande del mundo

La estructura interior del cubo de Rubik diseñado por Grégoire Pfennig, un cubo de Rubik de 33x33, no es sino brillante. Realmente es un cubo de 9x9 en el que coloca tres piezas entre cada pieza del 9x9. Es así como logra crear un cubo de

colosales dimensiones completamente funcional. Este método es conocido como *binary approach*, un método ya conocido por la comunidad que facilita la creación de cubos de gran tamaño.

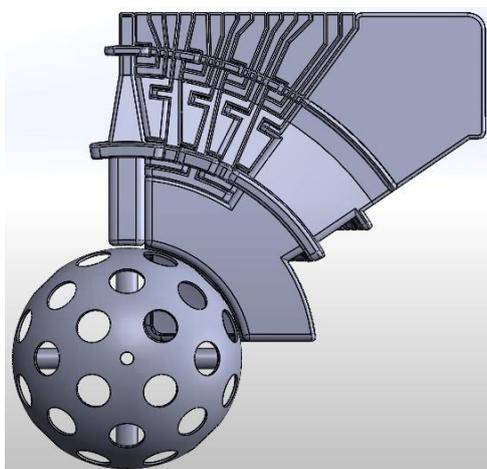


Ilustración 75 | Captura de pantalla del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017)

En esta imagen podemos observar el corte transversal del cubo. Podemos diferenciar las piezas por dos grupos haciendo referencia al sistema *binary approach*. El cubo real de 9x9 sería el que vemos en la Ilustración 76.

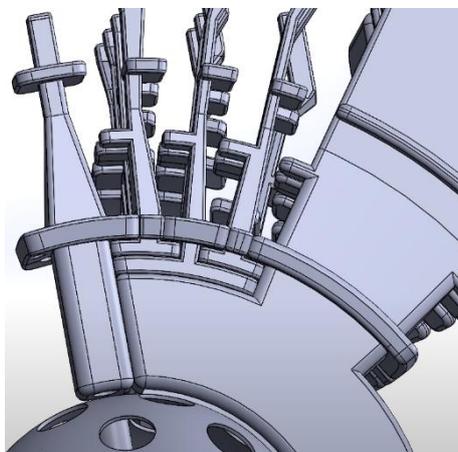


Ilustración 76 | Captura de pantalla del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017)

En esta imagen vemos 5 piezas: la arista, el centro y 3 entre las dos. Estas, en total, formarían un cubo de 9x9. Como apreciamos, entre cada una de estas piezas hay un gran espacio en el que caben 3 piezas por agujero, convirtiendo el cubo de 9x9 a 33x33.

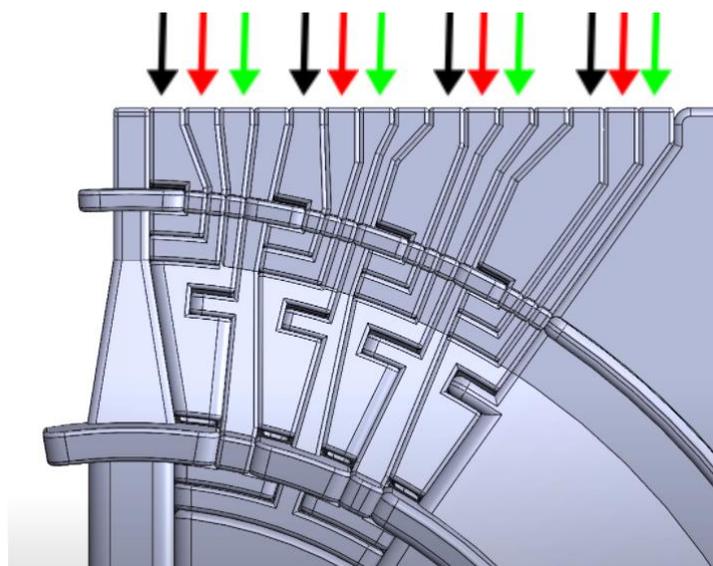


Ilustración 77 | Captura de pantalla editada del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017)

En esta otra imagen ampliada podemos ver las piezas que se colocan entre las piezas que forman el cubo de 9x9. La primera de ellas (flechas negras) se abraza a la pestaña de su respectiva pieza del 9x9, sistema muy parecido al ya visto del 5x5. La segunda pieza (flechas rojas) es también muy parecida a la ya vista en el cubo de 5x5, escondiéndose por debajo de la primera. Por último, la tercera pieza (flechas verdes) se esconde por debajo de la segunda para después abrazarse a la pestaña de su respectiva pieza del 9x9, proporcionando así una gran estabilidad.

Existen varias técnicas para ampliar la cantidad de piezas de un cubo haciendo uso del método *binary approach*. Se podría ampliar la cantidad de piezas entre pieza y pieza del cubo de 9x9, es decir, en vez de colocar 3 piezas como se mostraba en la Ilustración 77, proporcionar un mayor espacio y colocar 4 piezas por agujero. Otro método sería ampliar el cubo interior, en vez de ser de 9x9 podrías ampliarlo a 17x17. Haciendo esto y colocando 3 piezas por agujero lograríamos crear un cubo de 65x65, algo inimaginable. También, haciendo uso del cubo interior de 17x17, podrías reducir una pieza por agujero, creando así un cubo de 49x49. Como vemos, las variantes de este método son casi infinitas y depende de las necesidades del cubo y del conocimiento del desarrollador para aplicar una u otra y así crear un cubo del tamaño deseado.

## 2.1.8 Cálculo de piezas en un cubo de Rubik

Es importante ser conscientes de la cantidad de piezas que componen un cubo de Rubik, sobre todo al intentar diseñar cubos de gran tamaño. Aplicando una simple fórmula podemos calcular todas las piezas que componen un cubo de Rubik (siempre que este tenga una cantidad impar de piezas por lateral). Definiendo  $n$  = número de piezas por lado y  $x$  = cantidad total de piezas en el cubo, podemos determinar:

$$x = 2n^2 + (n - 1) \cdot 4(n - 2)$$

*Fórmula 2 | Elaboración propia | Fórmula para calcular cantidad total de piezas en un cubo de Rubik impar*

Esta fórmula nos daría la cantidad de piezas que componen cualquier cubo de  $n$  impar piezas sin tener en cuenta la/s pieza/s internas del cubo que lo permiten funcionar, como por ejemplo los ejes internos del cubo de Rubik de 3x3 o los tornillos que unen las piezas centrales de este a dichos ejes.

## 2.1.9 Cálculo de permutaciones en un cubo de Rubik

Como ya hemos comentado, los cubos de Rubik originales, los de 3x3, tienen un total de  $2n^2 + (n - 1) \cdot 4(n - 2)$  piezas, es decir, 26 piezas. Aunque parezcan pocas, estas pueden dar lugar a una gran cantidad de posibles combinaciones. Podemos encontrar fácilmente la fórmula para calcular la cantidad de permutaciones posibles de este, pero debido a que esta fórmula solamente es aplicable al cubo de Rubik de 3x3, en este apartado trataremos de justificar esta fórmula para más adelante crear una fórmula universal para calcular las permutaciones posibles de cualquier cubo de Rubik (siempre que este tenga una cantidad impar de piezas por lateral). Las permutaciones y orientaciones son independientes las unas de las otras, y por tanto:

$$P_{\text{totales}} = P_{\text{caras}} \cdot P_{\text{aristas}} \cdot P_{\text{vértices}}$$

*Fórmula 3 | Elaboración propia | Ecuación base para calcular permutaciones de un cubo de Rubik*

Supuestamente, si el cubo de Rubik tiene 26 piezas, deberían existir 26! permutaciones posibles en este, es decir,  $4,0329 \cdot 10^{26}$  permutaciones. Por muy lógico que parezca, este planteamiento está muy lejos de la realidad. Como ya hemos

mencionado en el capítulo 2.1.1 Mecánica de un cubo de Rubik de 3x3, el cubo de Rubik de 3x3 tiene 3 tipos de piezas: las piezas centrales, las piezas de la arista y las piezas de los vértices. Cada una de ellas se comporta de una forma distinta, y debemos analizarlas en grupos separados para calcular la cantidad total de permutaciones en dicho cubo.

### 2.1.9.1 Cálculo de permutaciones de las piezas centrales

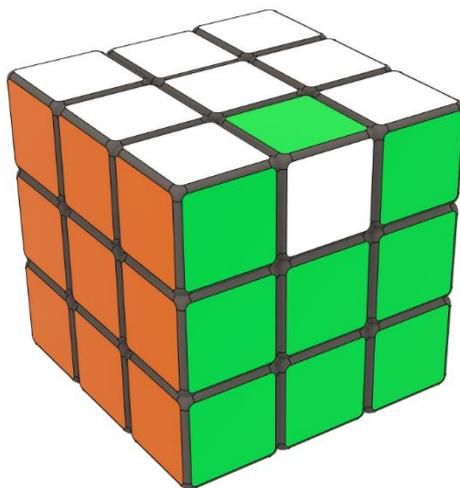
Las piezas centrales, como ya hemos comentado, se mantienen unidas a los ejes internos, así que no existe forma posible de permutarlas entre ellas ya que solamente pueden girar sobre sí mismas, y esto no se considera una posición diferente.

$$P_{centros} = 1$$

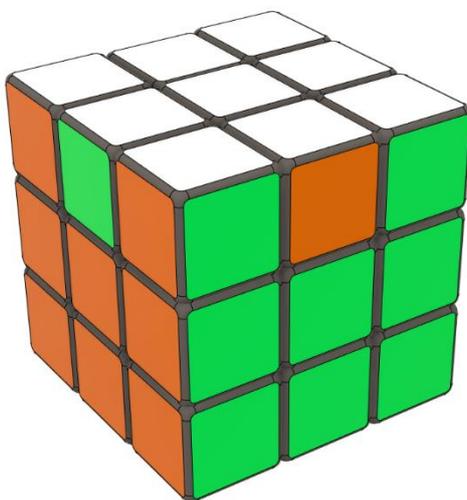
*Fórmula 4 | (Ibero Rubik, 2015) | Permutaciones totales de las piezas centrales*

### 2.1.9.2 Cálculo de permutaciones de las piezas de la arista

Las piezas de la arista, de lo contrario, sí pueden ser permutadas, aunque solamente es posible permutar una pieza de la arista con otra pieza de la arista. Es decir, si existen un total de 12 piezas de la arista en un cubo de 3x3, estas deberían tener un total de 12! posibles permutaciones posibles. Este planteamiento es correcto, aunque no completamente. Las piezas de la arista no solamente pueden permutarse entre otras del mismo grupo, sino que pueden ser orientadas de dos distintas maneras ya que tienen dos colores distintos por pieza. Esto significa que existen  $2^{12}$  formas de orientar las piezas de la arista. Este resultado es incompleto, ya que existe una última regla para las piezas de la arista. Los cubos de Rubik tienen casos irresolubles, es decir, permutaciones a la que es imposible llegar sin desmontar el cubo y colocar las piezas en esa posición exacta. En el caso de las aristas, estas presentan dos casos no solubles:



*Ilustración 78 | Elaboración propia | Una sola pieza orientada en posición contraria a la habitual*



*Ilustración 79 | Elaboración propia | Dos piezas permutadas entre ellas sin orientar*

Debido a estos dos casos irresolubles podemos definir que en una de cada dos de estas posibles orientaciones presentadas el cubo es soluble, y, por tanto, en  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$  de los casos estos casos serán solubles.

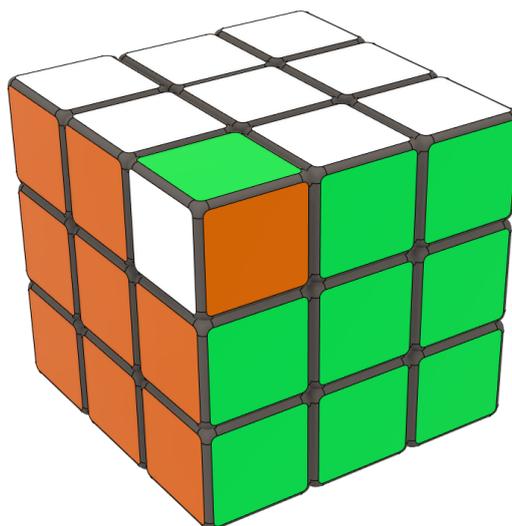
En definitiva, podemos calcular las permutaciones posibles de las piezas de la arista del cubo de Rubik de 3x3 con la fórmula:

$$P_{aristas} = 12! \cdot 2^{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 12! \cdot 12^{10}$$

*Fórmula 5 | (Ibero Rubik, 2015) | Ecuación para calcular permutaciones de las piezas de la arista*

### 2.1.9.3 Cálculo de permutaciones de las piezas del vértice

Por último, las piezas del vértice, de las cuáles existen 8 en el cubo de Rubik de 3x3, deberían tener un total de 8! permutaciones posibles y un total de  $3^8$  orientaciones posibles de piezas, ya que estas tienen 3 colores por pieza. Esto no es totalmente cierto, ya que, al igual que con las piezas de la arista, existe un caso irresoluble para las piezas del vértice:



*Ilustración 80 | Elaboración propia | Una sola pieza del vértice orientada en posición errónea*

Debido a esto podemos decir que en una de cada tres posiciones de este caso el cubo es soluble, o lo que es lo mismo:  $\frac{1}{3}$  de los casos que puede presentar dicha pieza es soluble.

$$P_{\text{vértices}} = 8! \cdot 3^8 \cdot \frac{1}{3} = 8! \cdot 3^7$$

*Fórmula 6 | (Ibero Rubik, 2015) | Ecuación para calcular permutaciones de las piezas de los vértices*

### 2.1.9.4 Cálculo de permutaciones en un cubo de 3x3

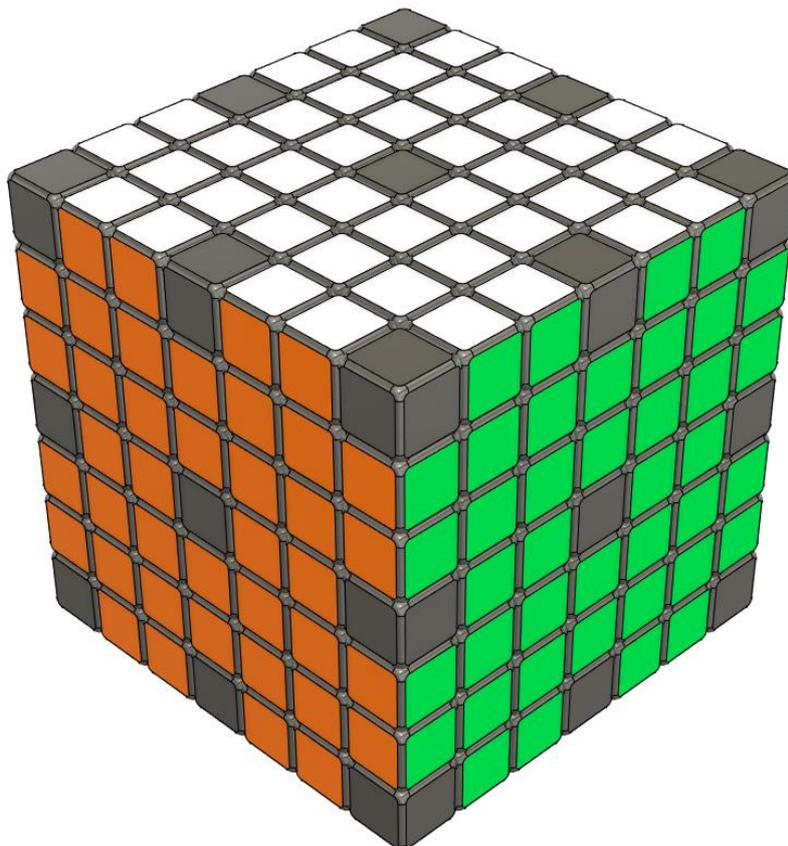
Aplicando la Fórmula 4, la Fórmula 5 y la Fórmula 6 a la Fórmula 3 obtenemos la fórmula final para calcular las permutaciones de un cubo de Rubik de 3x3.

$$P_{\text{totales}} = 8! \cdot 3^8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12! \cdot 2^{10} = 8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{10} = 4,325 \cdot 10^{19}$$

*Fórmula 7 | (Ibero Rubik, 2015) | Ecuación para calcular permutaciones de un cubo de Rubik de 3x3*

### 2.1.9.5 Cálculo de permutaciones de las piezas nuevas de los cubos mayores de 3x3

Estos mismos conceptos los podemos aplicar a los cubos de Rubik impares mayores de 3x3, pero debemos comprender cuáles son las nuevas piezas y cuál es su comportamiento.



*Ilustración 81 | Elaboración propia | Cubo de 7x7 con piezas nuevas coloreadas*

En esta imagen podemos ver un cubo de Rubik de 7x7 con las piezas nuevas coloreadas. Entre arista y vértice encontramos dos piezas únicas nuevas (piezas únicas nuevas de la arista<sup>10</sup>). Extrapolando a cubos más grandes encontraríamos el término general que nos da el número de piezas únicas por arista.

$$\text{Piezas únicas por arista} = \frac{n - 3}{2}$$

*Fórmula 8 | Elaboración propia | Ecuación para calcular cantidad de piezas únicas nuevas de la arista*

<sup>10</sup> Piezas únicas nuevas de la arista: Piezas que son únicas y que aparecen en cubos mayores de 3x3 en las aristas del cubo

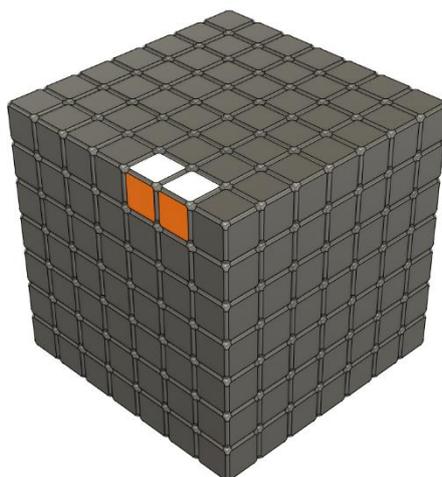


Ilustración 82 | Elaboración propia | Piezas únicas nuevas de la arista

Además, en la parte central encontramos 6 piezas únicas nuevas (piezas únicas nuevas centrales<sup>11</sup>). Extrapolando también este grupo de piezas a cubos de mayor tamaño encontraríamos el término general al que hemos llegado, que nos da la cantidad de piezas únicas centrales (excluyendo la pieza central).

$$\text{Piezas únicas centrales} = \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \frac{n-3}{2}$$

Fórmula 9 | Elaboración propia | Ecuación para calcular cantidad de piezas únicas nuevas centrales

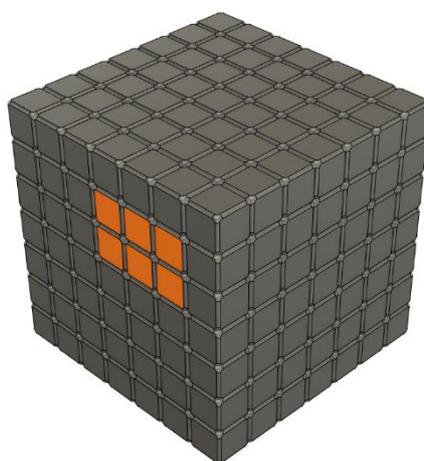


Ilustración 83 | Elaboración propia | Piezas únicas nuevas centrales

Estos cálculos son aplicables para cualquier cubo impar y nos definirá cuántas piezas únicas nuevas existen en el cubo. Todas las piezas nuevas de la arista se

<sup>11</sup> Piezas únicas nuevas centrales: Piezas que son únicas y que aparecen en cubos mayores de 3x3 en los centros del cubo

comportan de la misma forma, y, aunque de manera diferente a las anteriores, las piezas nuevas centrales cumplen la misma regla.

### 2.1.9.6 Cálculo de permutaciones en cubos de Rubik impares

Para calcular las permutaciones de las piezas nuevas de la arista tendremos en cuenta dos hechos:

El primero de ellos es que debemos diferenciar las piezas únicas nuevas de las piezas nuevas. Las piezas únicas nuevas se repetirán  $X$  veces para formar el cubo entero. Por ejemplo, las piezas centrales serían una pieza única nueva, y estas se repiten 6 veces para completar el cubo a diferencia de las piezas del vértice que se repiten 8 veces. En el caso de las piezas únicas nuevas de la arista existen, como ya hemos mencionado en la Fórmula 8,  $\binom{n-3}{2}$  de estas, y cada una de ellas se repetirá 24 veces para completar el cubo.

El segundo concepto es que solamente las piezas orientables pueden presentar casos irresolubles. Si nos fijamos en los casos presentados anteriormente, estos siempre lo eran debido a una incorrecta orientación de las piezas. Además, las piezas nuevas de la arista, por mucho que tengan dos colores por pieza, no son orientables, ya que solamente puede orientarse la pieza de la arista que se encuentra en medio.

Con estos dos conceptos pudimos definir la cantidad de permutaciones de las piezas únicas nuevas de la arista como:

$$24! \binom{n-3}{2}$$

*Fórmula 10 | Elaboración propia | Ecuación para calcular permutaciones de las piezas únicas nuevas de la arista*

Por último, definiremos la fórmula para calcular las posibles permutaciones de las piezas únicas nuevas centrales. El primer concepto es que, como ya hemos mencionado con anterioridad (Fórmula 9), existen  $\binom{n-3}{2}^2 + \frac{n-3}{2}$  piezas de estas, y cada una de ellas se repetirá 4 veces por las 6 caras del cubo, es decir, se repetirán 24 veces para completar el cubo.

Supuestamente, la fórmula para calcular las permutaciones totales de estas piezas debería ser:

$$24! \left( \frac{n-3}{2} \right)^2 + \frac{n-3}{2}$$

*Fórmula 11 | Elaboración propia | Ecuación incompleta para calcular permutaciones de las piezas únicas nuevas centrales*

No obstante, esto no es del todo cierto. Como ya hemos mencionado, existen 4 piezas de estas por cara, es decir, que habrá 4 piezas del mismo color. En este caso definiremos las permutaciones entre piezas iguales del mismo color como indistinguibles, lo que significa que deberemos hacer uso de la fórmula de combinatoria sin repetición para definir las permutaciones totales en dicho cubo. Esta fórmula nos define que, para calcular las permutaciones entre piezas iguales, debemos dividir el factorial de los posibles destinos de dichas piezas  $= \frac{x!}{y!(x-y)!}$  multiplicado por el factorial de las piezas únicas que constituyen el grupo  $= \frac{x!}{y!(x-y)!}$ . Sabiendo que  $x = \text{posibles destinos de dichas piezas} = 24$  y que  $y = \text{piezas únicas que constituyen el grupo} = 4$ , podemos sustituir las incógnitas y concluimos que un grupo de 4 piezas de un color único tiene un total de:

$$\frac{24!}{4!(24-4)!}$$

*Fórmula 12 | Elaboración propia | Ecuación para calcular permutaciones de una pieza única nueva central de un solo color*

Además, como ya hemos mencionado estas piezas se repiten en los 6 centros del cubo. Esto significa que deberemos multiplicar la anterior fórmula 6 veces restando 4 a x después de cada multiplicación, o lo que es lo mismo:

$$\left( \prod_{i=4}^6 \left( \frac{(28-i)!}{4!(24-i)!} \right) \right)^{\left( \frac{n-3}{2} \right)^2 + \frac{n-3}{2}}$$

*Fórmula 13 | Elaboración propia | Ecuación para calcular permutaciones de las piezas únicas nuevas centrales*

Aplicando todas las fórmulas mencionadas hasta el momento, llegamos a la conclusión que la cantidad de permutaciones de cualquier cubo de Rubik impar se calcula con la fórmula:

$$x = 8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{10} \cdot 24!^{\frac{n-3}{2}} \left( \prod_{i=4}^6 \left( \frac{(28-i)!}{4! (24-i)!} \right) \right)^{\left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \frac{n-3}{2}}$$

*Fórmula 14 | Elaboración propia | Fórmula universal para calcular permutaciones de cualquier cubo de Rubik con un número de piezas impar*

## 2.2 La fricción

La fricción es algo inevitable, una vía de escape de energía, de desgaste y de corrosión. Es un problema completamente ineludible, no existe forma de evitarla, pero si existen varias formas de reducirla a niveles casi inexistentes. Pero ¿qué es realmente la fricción?

La fricción es la fuerza que existe entre dos superficies en contacto. Dichas superficies pueden estar en estado sólido, líquido o gaseoso. Cualquier contacto de un átomo entre otro creará fricción, la cual se traducirá en una pérdida de energía en forma de energía térmica, sonora, lumínica o eléctrica. Además, la fricción puede separarse en dos grupos: fricción cinética y estática.

La fricción cinética es una fuerza inhibidora que se origina durante un movimiento de deslizamiento, es decir, cuando una superficie se mueve en contacto con otra superficie. Esta fuerza varía dependiendo del coeficiente de fricción cinética de las superficies en contacto y de las propiedades de los materiales.

En cambio, la fricción estática es aquella fuerza que se opone al desplazamiento entre dos superficies en contacto, es decir, es aquella fuerza que es igual o mayor a otra fuerza aplicada a una o dos de las superficies en contacto impidiendo su movimiento. Se trata de la fuerza que se debe superar para iniciar el movimiento de un objeto.

La unidad de medida del coeficiente de fricción entre dos superficies se representa con la letra griega  $\mu$  (mi). Dicho coeficiente puede tomar valores mayores de cero. La fuerza de fricción se calcula con la fórmula  $F = \mu \cdot N$ , en que N es la fuerza normal (masa por gravedad),  $\mu$  el coeficiente de fricción y F la fuerza de resistencia total.

### 2.2.1 Cómo reducir la fricción entre superficies

Existen una gran cantidad de métodos para reducir la fricción entre dos superficies, algunos más conocidos que otros. El más lógico y común de todos es reducir la fricción directa entre las dos superficies, es decir, crear superficies lo más

lisas posibles. Al reducir la porosidad de las superficies en contacto logramos disminuir considerablemente el coeficiente de fricción entre las mismas.

Además, uno de nuestros grandes aliados para reducir la fricción es el lubricante, el cual acostumbra a estar formado por aceites. Estos lubricantes crean una fina capa entre las superficies en las que se encuentran los aceites, evitando así parcial o completamente el roce directo entre las superficies, reduciendo el desgaste de estas y el coeficiente de fricción, además de evitar la corrosión de las superficies y mantener su buen estado y funcionamiento. No solamente los aceites son buenos lubricantes, sino que son los que ofrecen una mayor aplicabilidad.

Otro excelente lubricante es el aire, es decir, el gas. El aire en movimiento puede ser una pesadilla a la hora de reducir la resistencia de un objeto en movimiento, pero lo cierto es que también puede ser un gran aliado para reducir el coeficiente de fricción entre dos superficies. El ejemplo más claro es un simple experimento realizado con un CD y un globo. Dicho globo se llena de aire y se pega su apertura al agujero central del CD. La presión del aire del globo hace que el aire salga expulsado al exterior por el agujero del globo pegado al agujero central del CD. Dicho aire se esparce por la superficie inferior del CD elevándolo unos pocos milímetros del suelo. Esto resulta en una reducción casi total del coeficiente de fricción entre la superficie del CD y del suelo, permitiéndole deslizarse sin apenas ninguna fuerza que lo frene, manteniendo una velocidad casi constante durante un largo período de tiempo.

### 2.2.2 Cómo reducir la fricción en un cubo de Rubik

Comprendidos todos estos conceptos de reducción de fricción entre superficies, podemos analizar cuáles podrían adaptarse a las necesidades de un cubo de Rubik.

Entendemos que una de las cosas más importantes es que la superficie de las piezas del cubo sea lo más lisa y menos porosa posible. Es por ello por lo que la gran mayoría de cubos de producción masiva se crean a partir de inyección, un método muy económico para producciones a gran escala, el cual, a grandes rasgos se basa en inyectar plástico fundido en un molde con una forma específica.

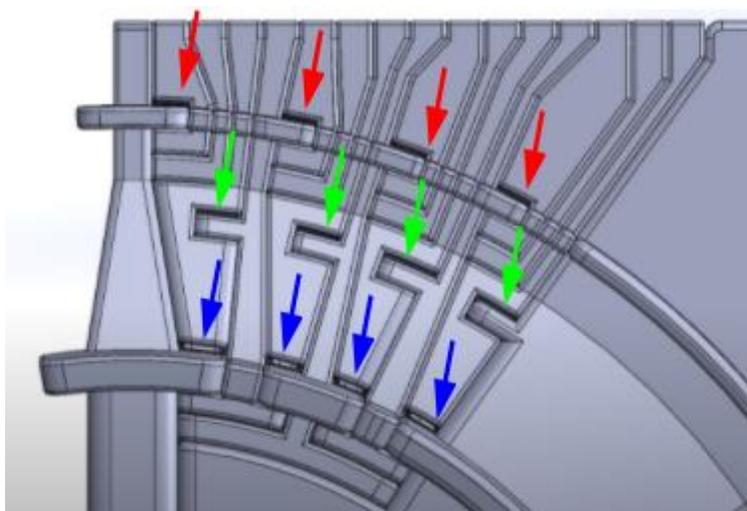
Otra de las medidas más conocidas y aplicadas para reducir la fricción en los cubos de Rubik es el uso de lubricantes especiales para plásticos. Dichos lubricantes reducen considerablemente el coeficiente de fricción entre las piezas, permitiendo así un movimiento mucho más rápido del cubo.

Así mismo, la funcionalidad de las características del aire en movimiento no es aplicable a un cubo de Rubik, ya que no se podría conectar ninguna bomba de aire al cubo ya que este debe ser móvil.

Existe otro método para perfeccionar un cubo de Rubik y lograr un movimiento lo más suave y preciso posible. Este se basa en la relación de la tolerancia aplicada entre piezas. En el cubo de Rubik de Grégoire Pfennig podemos apreciar esta tolerancia.

Grégoire, en su cubo de 33x33, solamente aplica tolerancia entre las piezas en tres zonas del cubo, las cuales tienen una clara relación entre ellas: son ejes de rotación.

En la imagen vemos estas zonas con tolerancia señaladas con flechas, cada una de ellas señalada con un color distinto.

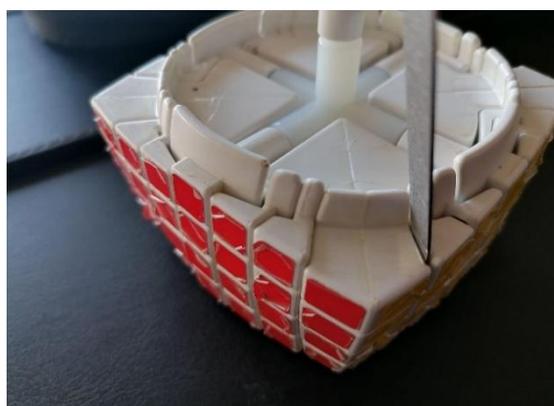


*Ilustración 84 | Captura de pantalla editada del cubo de 33x33 (Pfennig, 2017) | Tolerancias señalizadas*

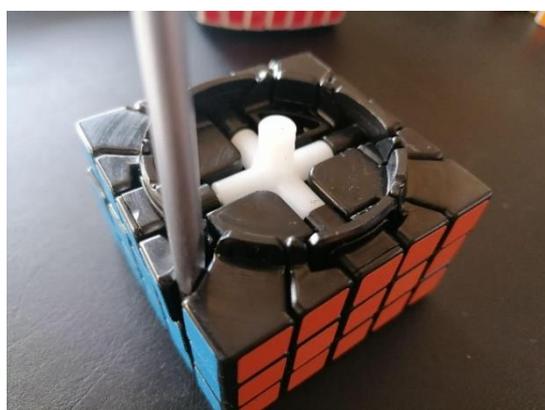
Apreciamos como, justo donde señalan las flechas, existe una separación entre los ejes de rotación en los que se unen las piezas. Esta separación crea una zona de no fricción en la que las dos superficies no están en contacto, pero aun así se mantienen unidas.

Además, si comparamos distintos cubos de distintas calidades encontramos dos características que los diferencian y que puede ser el factor decisivo entre un cubo de gran calidad con un espléndido giro a un cubo de baja calidad con un giro cuestionable.

La primera de estas diferencias es una menor tensión entre las piezas debido a una mayor tolerancia entre las propias piezas del cubo, es decir, no solamente una tolerancia aplicada en los ejes de giro del cubo, sino también entre las mismas piezas. Esta tolerancia reduce la tensión entre superficie reduciendo así el coeficiente de fricción entre ellas.



*Ilustración 85 | Elaboración propia | Cubo de 7x7 de baja calidad con objeto de 0,2 mm de grosor introducido*



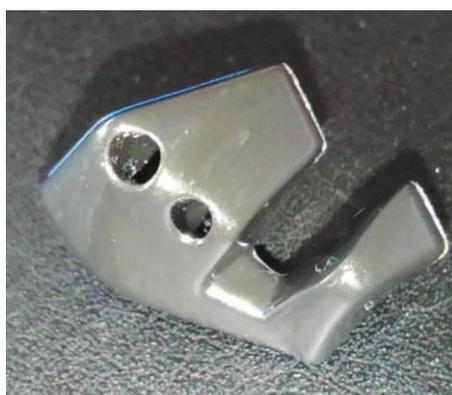
*Ilustración 86 | Elaboración propia | Cubo de 5x5 de alta calidad con objeto de 5 mm de grosor introducido*

En estas imágenes vemos dos cubos distintos, uno de color blanco (Ilustración 85) y otro de color negro (Ilustración 86). El cubo de Rubik de color negro es de una calidad muy superior y ofrece un movimiento suave sin apenas resistencia. Si tratamos de forzar las piezas para introducir un objeto entre ellas apreciamos como el cubo blanco apenas permite introducir un objeto de un grosor inferior de 0.2 mm, mientras, a su vez, el cubo negro permite introducir un objeto de 5 mm de

grosor. Al reducir la tensión entre las piezas reducimos la Fuerza de fricción total (F). Esta diferencia es una de las que permiten al cubo negro moverse con gran facilidad y sin apenas resistencia.

La clave está en encontrar la tolerancia perfecta entre las piezas, la cual no sea ni muy pequeña para así evitar que las piezas se presionen entre ellas, ni tampoco sea demasiado grande para así evitar que las piezas escapen del eje e incluso del cubo, algo catastrófico para cubos de gran tamaño con grandes cantidades de piezas.

La última gran característica de los cubos de Rubik de alta calidad es un peso muy reducido. En dichos cubos encontramos agujeros por los que se ha vaciado el interior de la pieza eliminando así gran parte de la masa del cubo. Al reducir la masa de las piezas reducimos la fuerza normal (N), ya que  $N = \text{Masa por Gravedad}$ , o, en otros términos, cuanto menor sea la Masa menor será N, y menor será la Fuerza de fricción total, aunque el Coeficiente de fricción se mantenga constante.



*Ilustración 87 | Elaboración propia | Muestra de una de las piezas del cubo mostrado en la Ilustración 86*

Aplicando estos dos conceptos podemos lograr crear un cubo de Rubik con unas características altamente favorables para proporcionar un movimiento suave sin apenas resistencia ni fricción, reduciendo así la posibilidad del fallo de una pieza que se puede transformar en su rotura completa o que sea expulsada del cubo indeseadamente.

## 2.3 Tecnologías de impresión 3D

Hoy en día existen muchas tecnologías para crear piezas funcionales de un cubo de Rubik, desde las más antiguas como la inyección de plástico, hasta nuevas tecnologías como la impresión 3D con resina. Todas estas tecnologías tienen distintas características ofreciendo ventajas y desventajas en unos u otros aspectos.

En este apartado encontraremos todas las tecnologías aplicables al proyecto con sus ventajas y desventajas, sus aplicaciones, coste, diferencias entre otros.

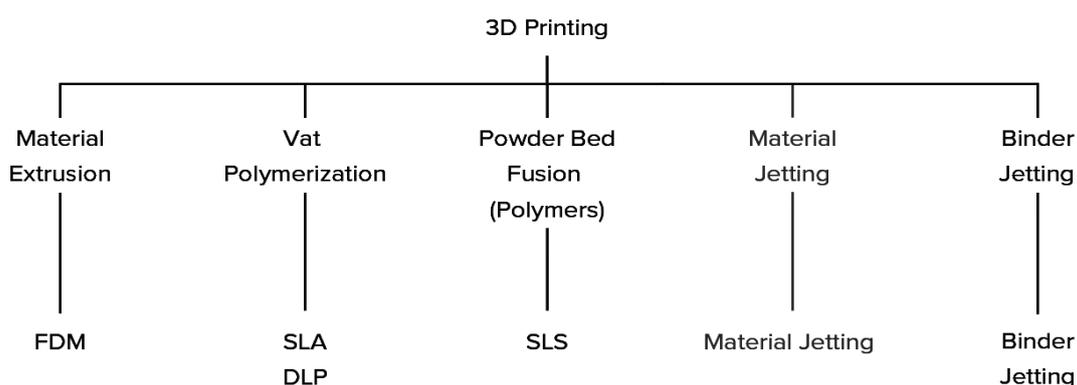


Ilustración 88 | (3D Hubs) | Muestra de familias de tecnología de impresión 3D

### 2.3.1 Inyección de plástico

La creación de piezas por inyección de plástico es el método más antiguo de modelaje de piezas de plásticos. La primera patente jamás registrada de esta tecnología fue a nombre de los hermanos John e Isaiah Hyatt. Estos crearon la primera máquina de moldeo por inyección de plástico en 1872, la cual requería un proceso mucho más simple en comparación con las máquinas actuales. En 1946 James Watson Hendry creó la primera máquina de inyección de plástico con husillo, la cual permitía un mayor control de la velocidad y calidad de los productos. Hendry perfeccionó su tecnología, la cual sigue siendo la base de los equipos usados actualmente. (Privarsa, 2017).

Casi todas las piezas de plástico que rodean nuestro día a día han sido creadas por inyección de plástico. Dicha tecnología, al permitir producir grandes cantidades de piezas idénticas, ofrece unos costes de \$1-5 por unidad (comúnmente), imprimiendo unas 1.000 a +100.000 unidades. Aun así, comparándolo con otras

tecnologías, el coste de producción del primer prototipo es muy alto debido a que un solo molde puede costar entre \$3.000-100.000+ dependiendo de su complejidad y materiales usados. (3D Hubs).

Cada molde permite producir millones de piezas durante su vida útil. Además, la calidad de las piezas es muy alta, y las superficies son perfectamente lisas para el ojo humano. Por último, la gran mayoría de los plásticos usados son reciclables y la tecnología tiene una baja emisión de carbono y vertido de residuos. (Eduardo Baño, 2020).

La inyección de plástico también tiene grandes desventajas que deben tenerse en consideración. La principal desventaja es el alto coste por pieza si esta no se produce en gran escala. La inyección de plástico está pensada para ofrecer costes muy competitivos a empresas que quieran producir millones de piezas exactamente iguales. El coste total de creación de las piezas sería muy alto, pero el precio por pieza se vería extremadamente reducido. Otras grandes desventajas son la rebaba excesiva que puede presentarse cuando la fusión de un polímero se introduce en la superficie de separación entre las distintas partes del molde, y las posibles marcas indeseadas en la superficie del plástico debido a una baja temperatura no deseada. Además, podemos encontrarnos que el molde se llene demasiado lento o rápido, causando así que la cavidad no se llene completamente o que el molde se vea dañado debido a la alta presión en él. Por último, las piezas pueden sufrir un fenómeno conocido como *halado*, el cual puede hacer que el material se contraiga en el centro debido a altas temperaturas. (Eduardo Baño, 2020).

### 2.3.2 Tecnología FDM

La tecnología FDM (“Fused Deposition Model”) fue desarrollada por S. Scott Crump en el año 1980, y fue comercializada en 1990 por Stratasys. Esta tecnología imprime piezas en 3D a partir de plástico fundido expulsado por una boquilla, la cual crea capas de 2D una encima de la otra para así terminar con una pieza en 3D. Si bien es cierto que la tecnología ha evolucionado mucho desde su creación, este método no permite crear piezas de alta definición.

La tecnología FDM ofrece una relación calidad-precio excelente para producciones a pequeña escala. Esta tecnología es la más económica de la impresión 3D, tanto por costes de impresoras como de materiales. Además, al ser impresa por filamentos, puede imprimir en distintos colores al mismo tiempo. Gracias a ello ofrece la posibilidad de imprimir los soportes necesarios para la pieza con PVA (Acetato de polivinilo), un polímero soluble en agua. Esto resulta en menos tiempo de postproducción ya que solamente debemos introducir las piezas en agua para deshacernos de los soportes. Estos soportes son totalmente imprescindibles para imprimir piezas con voladizos, ya que el plástico derretido no puede ser depositado en el aire sin que caiga. Por último, el tiempo de impresión suele ser bastante reducido, imprimiendo piezas de un día para otro (Bournias Varotsis, 3D Hubs).

Esta tecnología tiene muchas desventajas que se traducen en su bajo coste. El más significativo es la baja calidad de la superficie, con superficies rugosas y porosas palpables para el propio ojo humano, las cuales tienen un muy alto coeficiente de fricción. Además, la tecnología es considerablemente imprecisa y puede requerir varios intentos para imprimir una sola pieza sin imperfecciones. No solamente eso, sino que debido a los cambios de temperatura a los que se somete el plástico para calentarse y enfriarse, las piezas pueden curvarse y deformarse. Por último, requieren una minuciosa calibración para obtener modelos de mayor calidad, además de ofrecer poca resistencia a la torsión y crear piezas frágiles.

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>Uso no industrial</b>	± 0.5 mm	200 x 200 x 200 mm	0.05 - 0.4 mm	1 mm
<b>Uso industrial</b>	± 0.2 mm	1000 x 1000 x 1000 mm	0.05 - 0.4 mm	1 mm

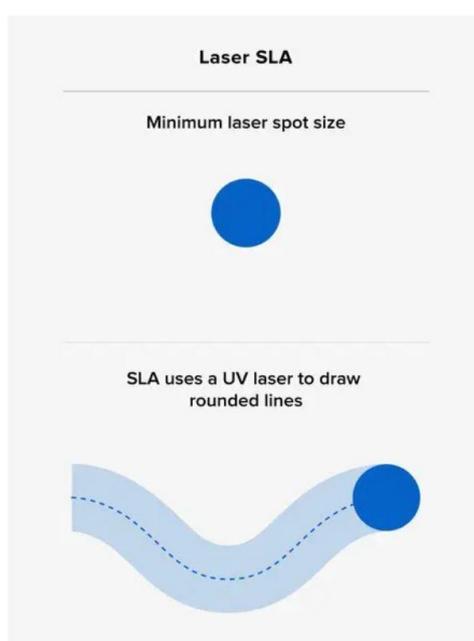
Tabla 1 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología FDM en uso tanto industrial como personal (no industrial)

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/ materiales
<b>Uso no industrial</b>	0.8 mm	Pueden ser solubles	Sí
<b>Uso industrial</b>	0.8 mm	Pueden ser solubles	Sí

Tabla 2 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología FDM en uso tanto industrial como personal (no industrial)

### 2.3.3 Tecnología SLA

La tecnología SLA (“Stereolithography”) es una de las tecnologías con mejores resultados en la industria de la impresión 3D, y, de hecho, es la tecnología más antigua de todas. Esta forma parte de la familia de tecnologías de impresión 3D de polimerización de VAT. En ella, un objeto es creado curando una resina de polímero capa por capa haciendo uso de un láser de luz ultravioleta. Los materiales usados son polímeros termoestables fotosensibles que vienen en estado líquido. La tecnología fue patentada en 1986 por Chuck Hull, su inventor. Esta tecnología ofrece unos resultados extraordinarios con superficies altamente lisas.



*Ilustración 89 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs ) | Imagen explicativa del proceso de impresión en SLA*

El proceso de impresión es muy parecido al resto de tecnologías. Al llenar el depósito con la resina deseada, una plataforma se hunde en ella hasta llegar al fondo. Es entonces cuando el láser de luz ultravioleta se enciende y enfoca a las zonas que deseamos curar. Al terminar la primera capa, la plataforma asciende pocas micras para repetir el proceso. Este también requiere de soportes para crear los voladizos que tenga la pieza y evitar así su rotura. Aun así, hoy en día los soportes no suponen ningún problema adicional debido a que estos son muy fáciles de remover de la pieza sin dañar su superficie.

Sus principales ventajas son las siguientes. Para empezar, es la tecnología con la mejor relación calidad-precio debido a sus excelentes resultados con precios

un poco más elevados que sus competidores. Además, estas impresoras se venden para uso profesional y no profesional, algo muy beneficioso para individuales. Además, sus tiempos de impresión son sorprendentemente rápidos imprimiendo piezas de gran tamaño en cuestión de pocas horas. Incluso algunos materiales ofrecen la posibilidad de sacrificar la alta calidad de la superficie a cambio de tiempos de impresión hasta 4 veces inferiores, algo ideal para la creación de prototipos. Por último, las impresoras de uso industrial ofrecen grandes medidas de impresión para crear una alta cantidad de piezas.

Esta tecnología también tiene grandes desventajas ante sus competidores, siendo una de las más claras el precio. Los precios son más elevados que la gran mayoría de tecnologías, impidiendo así que algunos individuos puedan tener acceso a la tecnología. Además, podemos encontrarnos con la necesidad de aplicar largos y costosos procesos de postproducción a las piezas. Por último, otra de las grandes desventajas es que, al imprimir las piezas en bases con líquido, solamente se puede usar un material por impresión y no se pueden crear soportes con materiales solubles al agua o piezas con varios materiales o colores. (Bournias Varotsis, 3D Hubs ).

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>Uso no industrial</b>	± 0.01 - 0.25 mm	145 x 145 x 145 mm	0.025 - 0.10 mm	0.5 mm
<b>Uso industrial</b>	± 0.01 - 0.03 mm	1000 x 1000 x 1000 mm	0.05 - 0.10 mm	0.1 - 0.3 mm

Tabla 3 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs ) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLA en uso tanto industrial como personal (no industrial)

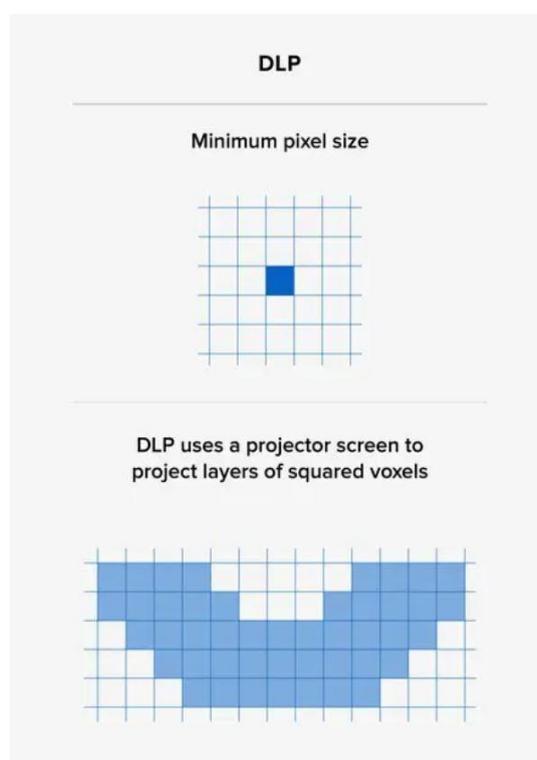
	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/ materiales
<b>Uso no industrial</b>	0.3 mm	Siempre requeridos	No
<b>Uso industrial</b>	0.075 mm	Siempre requeridos	No

Tabla 4 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs ) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLA en uso tanto industrial como personal (no industrial)

## 2.3.4 Tecnología DLP

La tecnología DLP (Digital Light Processing), al igual que la tecnología SLA, forma parte de la familia de tecnologías de impresión 3D de polimerización de VAT. De hecho, la tecnología DLP es una extensión de la tecnología SLA.

Esta, en vez de producir las piezas a partir de un puntero láser el cual polimeriza las partículas de la resina, las produce usando una pantalla de proyección digital para emitir una imagen de una capa por toda la plataforma curando todos los puntos de una capa al mismo tiempo. Esto se traduce en una considerable reducción del tiempo de impresión. La principal diferencia entre DLP y SLA en los resultados de superficie es que en SLA el puntero láser crea puntos redondos uno a uno. En cambio, en DLP, al producir capa por capa con una pantalla que cubre toda la plataforma, en vez de resultar en puntos, la superficie se polimeriza a partir de diminutos píxeles, lo cual se traduce en una inferior resolución. (van der Steen).



*Ilustración 90 | (van der Steen) | Imagen explicativa del proceso de impresión en DLP*

Larry Hornbeck, doctor en física, fue en este caso la mente responsable de su invención. Larry desarrolló la tecnología en 1987 en conjunto con Texas Instruments, quien sigue siendo el único fabricante de estas impresoras, aunque muchos productos de mercado autorizados están basados en sus Asics. (Lemelson MIT).

La tecnología abrió nuevas oportunidades al mundo de la impresión 3D y supuso un gran cambio en la industria. Además de ser mucho más precisa que la gran mayoría de tecnologías en el mercado, la tecnología DLP ofrece unos tiempos de impresión más rápidos que la tecnología SLA, además de ser más económica que esta. (FormLabs, 2020).

Aunque la tecnología 3D DLP parezca una de las más potentes con mejores resultados, versatilidad, tiempos de impresión y costes, también tiene grandes desventajas respecto a sus competidores. Para empezar, al imprimir en píxeles, la calidad de la superficie no es tan alta ni ofrece tan buenos resultados aun siendo una de las tecnologías con mayor resolución. Además, las partes corren el riesgo de deteriorarse con el tiempo, y sus costes siguen siendo superiores a tecnologías más económicas como FDM. (Innovación y Tecnología).

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>Uso no industrial</b>	± 0.03 - 0.14 mm	58 x 32 x 127 mm	0.05 - 0.15 mm	0.1 mm
<b>Uso industrial</b>	± 0.01 - 0.1 mm	192 x 120 x 230 mm	0.025 - 0.15 mm	0.1 mm

Tabla 5 | (van der Steen) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología DLP en uso tanto industrial como personal (no industrial)

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/materiales
<b>Uso no industrial</b>	0.01 mm	Siempre requeridos	No
<b>Uso industrial</b>	0.01 mm	Siempre requeridos	No

Tabla 6 | (van der Steen) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología DLP en uso tanto industrial como personal (no industrial)

### 2.3.5 Tecnología SLS

La tecnología SLS (“Selective Laser Sintering”) es una tecnología con características muy distintas a la impresión 3D clásica. Se basa en aplicar una fina base de polvo sobre una superficie, para que un láser fusione las partículas de polvo deseadas de la base. Al terminar una capa, se vuelve a esparcir otra capa más y el proceso se repite. Aun siendo muy parecido a FDM o SLA debido a que se basa en capas de 2D una encima de la otra, al tener polvo en las zonas no sintetizadas no

requiere soportes adicionales para imprimir las piezas, reduciendo así el tiempo de postproducción de las piezas. Esta tecnología es mayormente empleada en el sector del prototipado rápido para el sector aeroespacial, pero también tiene una gran aplicabilidad en productos finales. (Bournias Varotsis, 3D Hubs ).

Esta tecnología fue desarrollada por Carl Deckard en 1988. Graduado y apasionado por convertirse en un inventor, Carl decidió buscar un método para crear piezas en 3D a partir de partículas de polvo fusionadas con un láser. En 1988 Carl logró licenciar la tecnología con la ayuda de UT-Austin, con lo que pudieron empezar a comercializarla. Más adelante trabajó con otros inventores para mejorar la calidad de las piezas y perfeccionar su tecnología hasta fallecer el 6 de enero de 2020. (3D printing industry).

La tecnología SLS ofrece grandes ventajas respecto a sus principales competidores, siendo una de ellas la capacidad de imprimir piezas complejas sin uso de soportes adicionales debido a que en las zonas no impresas permanece el polvo sin fusionar el cual actúa como soporte de los voladizos. Además de sus competitivos tiempos de impresión, el polvo usado está compuesto por nylon (PA12), un material muy resistente con grandes propiedades mecánicas. (Lucía C., 2017).

Sin embargo, los precios de las impresoras SLS no están al alcance de muchas personas. Algunas de ellas llegan a los 250.000 €, y las más económicas rondan los 5.000 €. Además, aunque la tecnología sea capaz de imprimir a gran velocidad, ésta después requiere un tiempo de enfriamiento del 50% del tiempo de impresión, lo que puede alargar el proceso de fabricación hasta 12 horas más de lo esperado. Por último, las piezas requieren de un postproceso para eliminar todo el polvo indeseado que queda alrededor de la superficie o incluso en huecos y recovecos.

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>Uso no industrial</b>	± 0.3 mm	330 x 300 x 300 mm	0.1 - 0.12 mm	0.7 mm
<b>Uso industrial</b>	± 0.3 mm	750 x 550 x 550 mm	0.1 - 0.12 mm	0.7 mm

Tabla 7 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs ) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLS en uso tanto industrial como personal (no industrial)

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/ materiales
<b>Uso no industrial</b>	0.3 mm	Inexistentes	No
<b>Uso industrial</b>	0.3 mm	Inexistentes	No

*Tabla 8 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs ) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología SLS en uso tanto industrial como personal (no industrial)*

## 2.3.6 Tecnología MJF

La tecnología de impresión MJF (“Multi Jet Fusion”) es extremadamente parecida a la tecnología SLS; de hecho, forman parte de la misma familia de tecnologías de impresión, la familia de Fusión del lecho de polvo. Estas dos tecnologías se basan, como dice su nombre, en fusionar partículas de polvo capa por capa para crear piezas sólidas. La gran diferencia en la tecnología MJF es la reacción química empleada para fusionar las partículas. Mientras en la tecnología SLS se usa un láser para fusionar las partículas de polímero, en MJF se dispensa un agente de fusión que promueve la absorción de la luz infrarroja emitida por una fuente de esta misma. Al absorber esta luz, las partículas se fusionan y se unen para formar estructuras sólidas y consistentes. El proceso de fabricación es simple. Primero se esparce una fina capa de polvo sobre la plataforma donde se calienta a temperatura cercana a la de sinterización. Entonces, una plataforma con boquillas de inyección de tinta deposita el agente de fusión en el polvo mientras se deposita un agente de detallado para inhibir la sinterización cerca del borde de la pieza. Una vez depositados los dos agentes en toda la base, una potente fuente de luz infrarroja fusiona las áreas donde se han depositado los agentes de fusión. Gracias a este proceso, al igual que con la tecnología SLS, las piezas no requieren soportes para imprimir las piezas debido a que las partículas fusionadas quedan siempre rodeadas de polvo no sinterizado el cual actúa como soporte. (Maw), (Bournias Varotsis, 3D Hubs).

Esta tecnología fue desarrollada por la empresa HP en mayo de 2016, lo cual la convierte en una de las tecnologías de impresión más recientes de todas. Además, tiene mucha aplicabilidad en distintos sectores del mercado lo cual la hace una de las tecnologías más prometedoras e interesantes por sus propiedades mecánicas, resolución, tamaño de impresión y precio. Una de sus principales aplicaciones es la creación de prototipos. Aunque la gran mayoría de tecnología ofrecen esta capacidad,

MJF permite imprimir prototipos con altas propiedades mecánicas sin requerir de mucho tiempo para ello. Asimismo, MJF puede ser un potencial competidor para el moldeo por inyección. “MJF es la primera tecnología que se considera un competidor viable para el moldeo por inyección.” (Descubre Arduino)

Una de las principales ventajas de MJF es el coste por pieza. Esta tiene uno de los costes por pieza más bajos del mercado, aunque no supere a FDM. Además, su proceso de impresión es incluso más rápido que SLS. Por si esto no fuera poco, la tecnología tiene capacidad para imprimir piezas en color, y ofrece superficies muy lisas, más incluso que SLS. Por último, el proceso de fabricación de la tecnología es más respetuoso con el medio ambiente que sus antecesores como SLS. MJF permite recuperar gran parte del polvo no sinterizado.

Aunque la tecnología permita imprimir piezas a color, no todas las impresoras pueden. Las impresoras a color tienen unas dimensiones de impresión más pequeñas en comparación a las que solamente trabajan con un color. Además, a diferencia de tecnologías como SLA, sus opciones de materiales son limitadas. Por último, aunque el coste por pieza sea muy bajo, las impresoras 3D son muy caras.

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>Uso no industrial</b>	± 0.2 mm	380 x 285 x 380 mm	0.07 - 0.1 mm	0.6 mm
<b>Uso industrial</b>	± 0.2 mm	380 x 285 x 380 mm	0.07 - 0.1 mm	0.6 mm

Tabla 9 | (Maw) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJF en uso tanto industrial como personal (no industrial)

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/ materiales
<b>Uso no industrial</b>	0.25 mm	Inexistentes	No
<b>Uso industrial</b>	0.25 mm	Inexistentes	No

Tabla 10 | (Maw) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJF en uso tanto industrial como personal (no industrial)

### 2.3.7 Tecnología MJ

La tecnología MJ (“Material Jetting”) es un proceso de manufacturación que opera similarmente a las clásicas impresoras de 2D. En esta, un cabezal de impresión dispensa gotas de un material foto sensible que se solidifica en contacto con la luz UV, construyendo una pieza capa por capa al igual que el resto de las tecnologías. Los materiales usados en MJ son fotopolímeros termoestables que vienen en estado líquido. La tecnología Material Jetting crea piezas de gran precisión dimensional con superficies muy lisas y poco porosas. Además, al imprimir con un cabezal de impresión, ésta permite crear piezas con múltiples colores o materiales al mismo tiempo. Para crear las piezas, primero la resina líquida se calienta a 30-90 grados centígrados para lograr una óptima viscosidad para su uso. Entonces, el cabezal de impresión se coloca encima de la plataforma de montaje para depositar pequeñas gotas de resina en las zonas deseadas. Después de ello, una luz ultravioleta cura el material depositado solidificando el fotopolímero para así crear la primera capa. Una vez terminado, el proceso se repite capa por capa al igual que el resto de las tecnologías que hemos visto (Bournias Varotsis, 3D Hubs).

A diferencia de la mayoría de las tecnologías de impresión 3D, en MJ las gotas de resina se depositan de forma lineal, por mejor decir, en vez de tener un cabezal de impresión tiene varios cabezales extendidos linealmente para cubrir el ancho de la base. Cada uno de estos cabezales puede usar la resina deseada en la zona deseada. Al solamente tener que moverse en un solo eje, el proceso de impresión se acelera considerablemente ofreciendo tiempos de impresión muy competitivos .

La tecnología ofrece grandes ventajas y aplicaciones que otras tecnologías no son capaces de ofrecer. La principal y que más atractiva la hace es su capacidad para imprimir piezas con distintos materiales, colores y propiedades al momento, lo cual la hace la tecnología perfecta para el prototipado. No solamente eso, sino que al ser capaz de imprimir con múltiples materiales puede imprimir los soportes requeridos con materiales solubles al agua. Además, ofrece una superficie increíblemente lisa incluso comparable a los resultados que ofrece la inyección de plástico. Por último, las partes creadas con MJ tienen propiedades térmicas y mecánicas homogéneas.

No solamente son ventajas, y es que las partes creadas con MJ solamente son útiles para prototipos no funcionales debido a que son muy propensas a la rotura y no

tienen grandes propiedades mecánicas. Además, los materiales fotosensibles se degradan con el paso del tiempo, y la tecnología sigue siendo muy cara lo que dificulta su uso y limita las capacidades de usuarios y empresas.

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>Uso no industrial</b>	± 0.05 mm	380 x 250 x 200 mm	0.016 - 0.032 mm	1 mm
<b>Uso industrial</b>	± 0.05 mm	1000 x 800 x 500 mm	0.016 - 0.032 mm	1 mm

Tabla 11 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJ en uso tanto industrial como personal (no industrial)

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/ materiales
<b>Uso no industrial</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí
<b>Uso industrial</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí

Tabla 12 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología MJ en uso tanto industrial como personal (no industrial)

### 2.3.8 Tecnología BJ

La tecnología BJ (“Binder Jetting”) emplea un método de manufacturación muy parecido al empleado en MJ y SLS o MJF. En ella, un aglutinante es depositado encima de una base de polvo, uniendo estas áreas para formar una pieza sólida. Los materiales usados en BJ se encuentran en polvo, es decir, en diminutas partículas al igual que en SLS o MJF. La principal diferencia es que en vez de fusionar las piezas con un láser o con un agente que promueve la absorción de la luz, estas se fusionan con un aglutinante que actúa como pegamento. Las boquillas de extracción de este aglutinante son muy parecidas a las usadas en las impresoras 2D. Todas las boquillas depositan el pegamento en las zonas deseadas capa por capa hasta crear una pieza en 3D. Al igual que en SLS o MJF, los soportes no son requeridos debido a que el polvo no fusionado actúa como soporte. La gran diferencia es que, al usar múltiples cabezales de expulsión del aglutinante, la tecnología es capaz de imprimir piezas multicolor. Al usar un tipo de pegamento, el material no debe ser calentado

previamente evitando así problemas de deformación de las piezas debido a los cambios de temperatura. (Bournias Varotsis, 3D Hubs).

Las principales ventajas de la tecnología son las siguientes. Para empezar, son capaces de imprimir piezas multicolor sin necesidad de soportes, algo que ninguna otra tecnología ofrece. Además, los costes de impresión de las piezas son mucho más bajos comparados con otros procesos de impresión 3D como MJ, SLA o SLS. No solamente eso, sino que la tecnología es capaz de crear piezas de gran tamaño y complejas geometrías sin sufrir deformaciones por los cambios térmicos. Por último, esta ofrece excelentes resultados para pequeñas producciones en serie.

Esta tecnología tiene también varias desventajas. Para empezar, las propiedades mecánicas de las piezas creadas son muy pobres y tienen muy poca aplicabilidad para piezas funcionales. Además, es muy complicado imprimir piezas de más de 50 mm ya que estas son propensas a romperse durante el postprocesado. Por último, la tecnología no ofrece un gran abanico de materiales para usar y los usuarios se encuentran muy limitados a la hora de escoger el material adecuado para sus piezas.

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>Uso no industrial</b>	± 0.2 mm	200 x 250 x 200 mm	0.035 - 0.05 mm	1 mm
<b>Uso industrial</b>	± 0.2 mm	2200 x 1200 x 600 mm	0.035 - 0.05 mm	1 mm

Tabla 13 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Tabla de explicación de las distintas características de la tecnología BJ en uso tanto industrial como personal (no industrial)

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/ materiales
<b>Uso no industrial</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí
<b>Uso industrial</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí

Tabla 14 | (Bournias Varotsis, 3D Hubs) | Segunda tabla de explicación de las distintas características de la tecnología BJ en uso tanto industrial como personal (no industrial)

### 2.3.9 Comparación de las tecnologías (uso no industrial)

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>FDM</b>	± 0.5 mm	200 x 200 x 200 mm	0.05 - 0.4 mm	1 mm
<b>SLA</b>	± 0.01 - 0.25 mm	145 x 145 x 145 mm	0.025 - 0.10 mm	0.5 mm
<b>DLP</b>	± 0.03 - 0.14 mm	58 x 32 x 127 mm	0.05 - 0.15 mm	0.1 mm
<b>SLS</b>	± 0.3 mm	330 x 300 x 300 mm	0.1 - 0.12 mm	0.7 mm
<b>MJF</b>	± 0.2 mm	380 x 285 x 380 mm	0.07 - 0.1 mm	0.6 mm

Tabla 15 | (3D Hubs) | Tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso no industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/ materiales	Principal característica
<b>FDM</b>	0.8 mm	Pueden ser solubles	Sí	Bajo coste
<b>SLA</b>	0.3 mm	Siempre requeridos	No	Excelentes resultados
<b>DLP</b>	0.01 mm	Siempre requeridos	No	Excelentes resultados, +económico
<b>SLS</b>	0.3 mm	Inexistentes	No	Sin soportes, estructuras complejas
<b>MJF</b>	0.25 mm	Inexistentes	No	Sin soportes, estructuras complejas, grandes dimensiones de impresión
<b>MJ</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí	Múltiples materiales y colores
<b>BJ</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí	Múltiples colores, sin soportes

Tabla 16 | (3D Hubs) | Segunda tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso no industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde

### 2.3.10 Comparación de las tecnologías (uso industrial)

	Precisión dimensional	Dimensiones comunes de impresión	Altura común de las capas	Grosor mínimo
<b>FDM</b>	± 0.5 mm	200 x 200 x 200 mm	0.05 - 0.4 mm	1 mm
<b>SLA</b>	± 0.01 - 0.25 mm	145 x 145 x 145 mm	0.025 - 0.10 mm	0.5 mm
<b>DLP</b>	± 0.03 - 0.14 mm	58 x 32 x 127 mm	0.05 - 0.15 mm	0.1 mm
<b>SLS</b>	± 0.3 mm	330 x 300 x 300 mm	0.1 - 0.12 mm	0.7 mm
<b>MJF</b>	± 0.2 mm	380 x 285 x 380 mm	0.07 - 0.1 mm	0.6 mm
<b>MJ</b>	± 0.05 mm	380 x 250 x 200 mm	0.016 - 0.032 mm	1 mm
<b>BJ</b>	± 0.2 mm	200 x 250 x 200 mm	0.035 - 0.05 mm	1 mm

Tabla 17 | (3D Hubs) | Tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde

	Detalle mínimo	Soportes	Múltiples colores/materiales	Principal característica
<b>FDM</b>	0.8 mm	Pueden ser solubles	Sí	Bajo coste
<b>SLA</b>	0.3 mm	Siempre requeridos	No	Excelentes resultados
<b>DLP</b>	0.01 mm	Siempre requeridos	No	Excelentes resultados, +económico
<b>SLS</b>	0.3 mm	Inexistentes	No	Sin soportes, estructuras complejas
<b>MJF</b>	0.25 mm	Inexistentes	No	Sin soportes, estructuras complejas, grandes dimensiones de impresión
<b>MJ</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí	Múltiples materiales y colores
<b>BJ</b>	0.5 mm	Pueden ser solubles	Sí	Múltiples colores, sin soportes

Tabla 18 | (3D Hubs) | Tabla de comparación de las distintas tecnologías mostradas en este capítulo para uso industrial. Las tecnologías que destacan en cada área están remarcadas en color verde

### 2.3.11 Conclusiones de las tecnologías comparadas

Al analizar y cotejar las distintas tecnologías vemos que cada una de ellas tiene distintas características, ventajas y desventajas. Es por ello que, en el momento de definir qué tecnología será empleada en un proyecto, los integrantes deben conocer

las características de este, el presupuesto disponible, tiempo, requerimientos de precisión, tamaño entre otro.

## 2.4 ¿Qué es una patente de invención?

“Documento en que oficialmente se le reconoce a alguien una invención y los derechos que de ella se derivan” (RAE). Recapitulando, una patente es un derecho exclusivo que concede el estado a un ciudadano para la protección de una invención. Esta proporciona derechos exclusivos al titular de la patente que le permitirán usar la invención e impedir que terceros se apropien de ella sin su consentimiento durante un período limitado de tiempo. El titular también dispone de la posibilidad de vender la patente o ceder los derechos a terceros para que la comercialicen bajo licencia. (INPI).

El primer registro de patente del que se tiene conocimiento data del año 1416. Esta fue otorgada a Francisco Petri por la República de Venecia, y le daba los derechos de monopolizar durante 50 años la construcción de máquinas de majado y abatanado de tejidos. Sin embargo, esta patente nunca fue puesta en práctica, y es por ello que la considerada primera patente de la historia es la patente otorgada a Filippo Brunelleschi en 1421. Esta consistía en un privilegio por tres años para la construcción de un barco de transporte de bloques de mármol. (Museo virtual).



Ilustración 91 | (Sierra, 2021) | Estatua de Filippo Brunelleschi situada en el Palacio de los Canónigos, Florencia

### 2.4.1 Requisitos para formalizar una patente

Existe un claro requisito para solicitar y recibir los derechos de una patente, y se trata de la revelación de la invención al público, aunque esta esté completamente protegida durante un tiempo determinado. Esta protección existe a nivel territorial, lo que significa que solamente entrará en vigor la protección de la invención en aquel/aquellos país/es o zonas políticas en las que se haya reconocido dicho derecho al autor o solicitante. (Crespo Cepeda, 2021). Este plazo limitado de protección suele ser de 20 años, el máximo permitido legalmente. Además, para obtener la protección de una patente se deben cumplir otros tres requisitos:

El primero y más importante es que dicha invención debe ser novedosa, es decir, debe ser un producto (INPI) completamente nuevo en mercado y no divulgado públicamente.

El segundo requisito es la actividad inventiva. Dicha actividad se refiere a que la invención no debe resultar obvia para un experto en el campo técnico, sino que requiera de una notoria inversión en I+D para llegar al resultado final.

El último requisito es la aplicabilidad industrial, o, dicho de otra manera, que la invención pueda ser comercializada a gran escala para poder optar al éxito.

### 2.4.2 La patente en un ámbito jurídico y social

La justificación de la creación de dichos derechos es que los beneficios financieros derivados de la explotación de la patente y la revelación de las invenciones resultantes para su difusión y utilización pública promoverán la innovación y elevarán el nivel técnico de la industria de dicho país con evidentes y notorios beneficios para su comercio. (OEPM).

Un claro ejemplo de este beneficio es el caso de la empresa BlackBerry. Dicha empresa se hizo famosa, según aseguran los expertos, debido a su extenso uso de los teclados QWERTY y el sistema de mensajes que empleaban conocido como "pin". BlackBerry se apropió de una gran cantidad de patentes de sus teléfonos para asegurar su posición en el mercado y evitar que otras marcas copiaran sus productos. La empresa se vio beneficiada por la explotación del producto en vigor de la patente, pero también indujo a otras empresas a innovar y traer algo nuevo en el mercado. El

producto final: el iPhone, un teléfono inteligente con pantalla táctil. Esta innovación, entre muchos otros factores, supusieron la decaída de la empresa BlackBerry, la cual pasó de su máximo auge a ser una más del montón. BlackBerry llegó a tener una cuota del 50% del mercado estadounidense de teléfonos inteligentes antes de 2010, pero ya en 2013 llegaron a solamente el 1% del mercado. (Justel, 2014).

Este caso es una gran ejemplificación de la importancia de las patentes dentro de un mercado liberal capitalista, ya que induce a las empresas a la explotación de sus productos patentados mientras otras se ven obligadas a traer un nuevo producto de mayor calidad que ofrezca nuevas características y logre llamar la atención de su potencial cliente. Es por ello que la divulgación de la invención a nivel público constituye un criterio esencial en los procedimientos de concesión de patentes.

A nivel jurídico, la patente se reconoce en diversos tratados, siendo de ellos el más importante el artículo 10 del código civil, en el que se reconocen los derechos de propiedad intelectual e industrial, y que se protegerán dentro del territorio español de acuerdo con la Ley española, sin perjuicio de los establecido por los convenios y tratados internacionales en los que España sea parte. Además, es reconocido en el capítulo XI del título XIII (artículos 273-277, 287-288 y 298-304) del código penal que “será castigado con la pena de prisión de seis meses a dos años y multa de 12 a 24 meses el que, con fines industriales o comerciales, sin consentimiento del titular de una patente o modelo de utilidad y con conocimiento de su registro, fabrique, importe, posea, utilice, ofrezca o introduzca en el comercio objetos amparados por tales derechos” (OEPM).

### 2.4.3 Cómo formalizar una patente

El proceso requerido para formalizar una patente de invención está formado por una serie de pasos y procesos que el solicitante deberá cumplir. Es por ello que muchas empresas se especializan en la formalización de patentes. Estos servicios facilitan la solicitud de dichas patentes gracias a sus expertos.

Para empezar, estas empresas solicitan al inventor una búsqueda previa de posibles patentes que pudieran anticipar la invención que se intenta proteger, ya que algunas patentes podrían imposibilitar la protección industrial de nuestra invención.

Determinada la viabilidad de la propuesta, el solicitante debe redactar la memoria técnica. En esta memoria el inventor debe acreditar y referenciar el trabajo realizado. Dicha memoria debe seguir la siguiente estructura: Debe iniciar con un resumen, una síntesis de todo el trabajo realizado. A continuación, se incluye el índice, aunque es opcional en documentos cortos. Después deben proceder la introducción, los objetivos, la metodología realizada para llegar a los resultados, el análisis de los resultados y por último las conclusiones del proyecto, además de la requerida bibliografía para hacer mención de los trabajos que hayamos consultado para llevar a cabo nuestro proyecto. (Villaroya Gaudó, Alastruey Benedé, Resano Ezcaray, Torres Moreno, & Suárez García, 2017).

Finalizada la memoria técnica, la agencia realizará un amplio estudio para encontrar posibles patentes ya formalizadas que impidan el registro de nuestra invención. Dicha búsqueda supone un coste de aproximadamente 500-900€ por parte de ellos.

Si dicha búsqueda es positiva es posible formalizar la patente requerida, el solicitante deberá analizar las dos posibles solicitudes de patentes a nivel nacional. La primera de ellas es el Modelo de Utilidad.

Pueden protegerse como modelos de utilidad utensilios, instrumentos, herramientas, aparatos, dispositivos o partes de estos. Estos, como cualquier patente, exigen novedad. Los gastos de dicha solicitud son los siguientes:

- 500€ para los honorarios profesionales relativos a la preparación del expediente y depósito de la solicitud, incluyendo el traslado del Informe sobre el Estado de la Técnica (sin estudio)
- 86,17€ para las tasas oficiales de solicitud e IET.

Una vez hecha la solicitud de formalización del modelo de utilidad, se abre un período de dos meses por parte de terceros. Si en este período de tiempo no hay oposiciones o son desestimadas el modelo de utilidad es concedido al solicitante. Este documento otorga protección a nivel nacional durante 10 años improrrogables, y está sujeta al pago de anualidades. Este título, además, tiene un coste adicional de 200€ por el control del expediente y envío de la comunicación de concesión y título.

La segunda posible vía de protección es la patente.

Esta protege invenciones de producto e incluso procedimientos, pero requiere novedad absoluta y un alto nivel de actividad inventiva, o, en caso contrario, será denegada por la OEPM. En su tramitación se elabora el Informe sobre el Estado de la Técnica. A través de este la OEPM define el nivel de novedad y actividad inventiva. Los gastos de tramitación de una patente son los siguientes.

- 680€ para honorarios profesionales relativos a la preparación del expediente y depósito de la solicitud, incluyendo el traslado del Informe sobre el Estado de la Técnica.
- 673,94€ para las tasas oficiales de solicitud e IET.

Antes de los tres meses posteriores a la publicación en el BOPI del IET, debe solicitarse obligatoriamente el examen sustantivo. Si este examen es superado se otorgará la patente al solicitante. Dicha concesión otorga protección a nivel nacional durante un período de 20 años sujetos al pago de anualidades para su mantenimiento. (Ingenias).

## 3. Parte práctica

Partiendo de las bases estudiadas en la parte teórica, podemos pasar a justificar todas las decisiones que se han tomado para diseñar el cubo de Rubik en cuestión. En este apartado encontraremos todos los procesos por los que se ha pasado para al final diseñar el que sería el cubo de Rubik más grande del mundo.

### 3.1 Cantidad de piezas del cubo

Al empezar a trabajar en un cubo de Rubik más grande que el cubo de Rubik de 33x33 se debió tomar la decisión de qué cantidad de piezas aportaría la menor complejidad al diseño del cubo. Como ya justificamos anteriormente (2.1.3 ¿Por qué el cubo de Rubik tiene un número impar de piezas?), el cubo de Rubik debería tener un número de piezas impar, simplificando así su estructura. Además, existían las siguientes combinaciones entre piezas de la estructura exterior e interior para el diseño de este.

Tamaño del cubo	Tamaño estructura interior	Piezas entre piezas de la estructura interior	Cantidad total piezas
33x33	9x9	3	6147
41x41	9x9	4	9603
49x49	17x17	2	13827
65x65	17x17	3	24579
81x81	17x17	4	38403

*Tabla 19 | Elaboración propia | Tabla de muestra de las posibles combinaciones de piezas para llegar a un tamaño u otro del cubo*

La primera dimensión con la que se empezó a trabajar fue con el cubo de 65x65, ya que este tenía la misma cantidad de piezas entre piezas de la estructura interior que el cubo de 33x33 de Grégoire Pfennig. Aun así, poco a poco percibimos como el hecho de diseñar un cubo tan grande aumentaba considerablemente los costes de producción y desarrollo, hecho que provocó la búsqueda de soluciones no tan complejas, pero igual de eficaces. Una de las opciones valoradas fue crear un

cubo de Rubik de 41x41, pero el hecho de colocar 4 piezas entre las piezas de la estructura interior se traducían en una mayor cantidad de puntos críticos en los que el cubo podría hacer fallida y desmontarse.

Es por eso que, debido a la gran cantidad de piezas que componían el cubo, se tomó la decisión de sacrificar costes y complejidad de diseño para crear un cubo con una estructura interior de mayor tamaño, pero con una menor cantidad de piezas entre piezas de la estructura interior, hecho que se traducían en una reducción de la cantidad de puntos críticos del cubo y una mayor solidez de este. Así pues, después de meses de pruebas y análisis, la decisión final fue la de diseñar un cubo de Rubik de 49x49, con una estructura interior de 17x17, 2 piezas entre cada pieza de la estructura interior y un total de 13827 piezas.

## 3.2 Diseño de la estructura

Una vez definido el tamaño del cubo, podemos empezar a diseñar la estructura de este. Estos cubos tan grandes, como ya mencionamos anteriormente, se suelen diseñar haciendo uso de la técnica *binary approach*, un método muy útil para simplificar el diseño y el montaje de cubos gigantescos. La primera parte por desarrollar es la estructura interior, montando así un cubo de, en este caso, 17x17, completamente funcional e independiente de la estructura exterior.

### 3.2.1 Diseño de la estructura interior

Al ya haber decidido el tamaño de la estructura interior solo queda plantear, desarrollar y diseñar la distribución de las piezas que forman la estructura interior. Al ser un cubo tan grande, las formas de diseño de su estructura son casi infinitas. Aun así, el enfoque que los mejores diseñadores le han dado es el siguiente. El cubo tiene una estructura interna parecida al *binary approach*, pero con una diferencia crucial. La estructura interior, formada por un cubo de 5x5, está formada por el centro, las piezas de la arista y la pieza subsecuente de esta. Por el contrario, el *binary approach* está formado por la pieza central, las de la arista y las piezas que se encuentran justo entre estas dos.

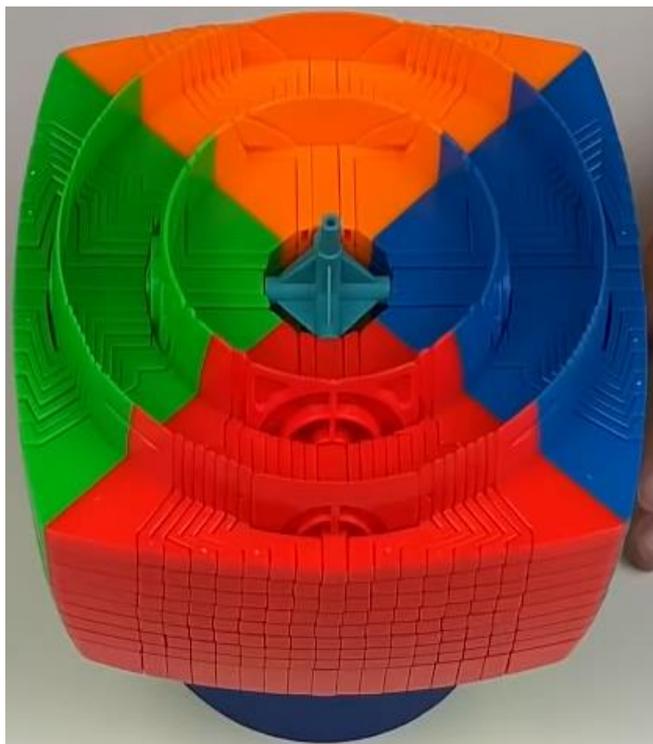


Ilustración 92 | Captura de pantalla (Fisher, 2018) | Imagen del corte transversal de 17x17

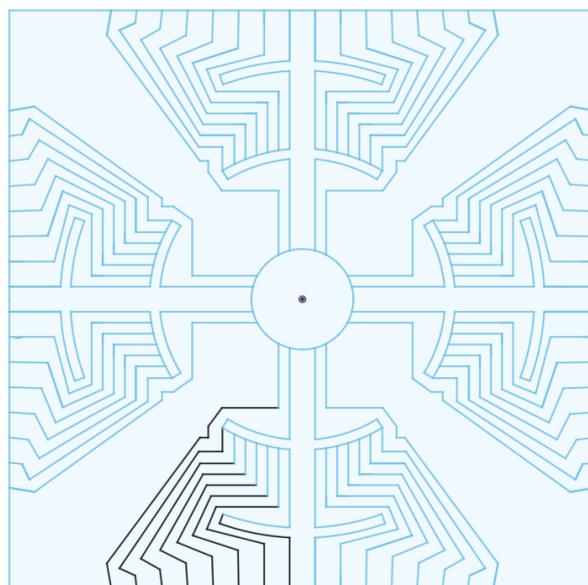


Ilustración 93 | Elaboración propia | Corte transversal elaborado a partir de la Ilustración 92 | Captura de pantalla | Imagen del corte transversal de 17x17

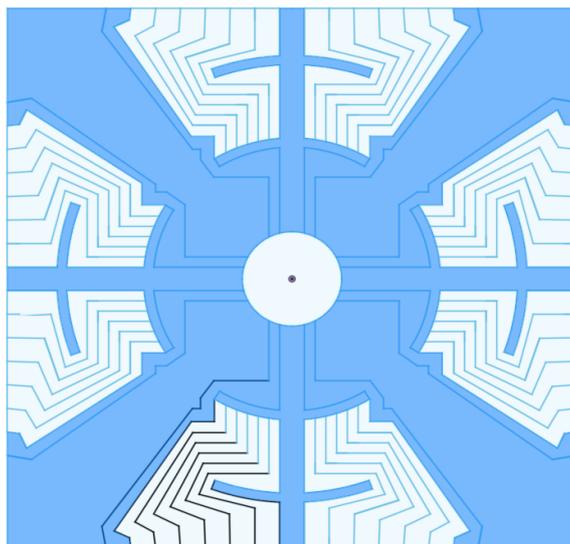


Ilustración 94 | Elaboración propia | Ilustración 93 con la estructura interior remarcada en azul

En esta imagen vemos el corte transversal de un cubo de 17x17, y las otras dos imágenes son representaciones gráficas de este. Como apreciamos en la primera imagen (Ilustración 92) existen dos figuras circulares: la más externa, que, además de sujetar las piezas de la estructura exterior, aporta una mayor sujeción a las piezas de la estructura interior. Así mismo, la figura circular interna aporta sujeción a las piezas de la estructura interior (remarcadas en azul en la tercera fotografía).

Aunque una solución para el diseño de la estructura interior del cubo de 49x49 sería usar esta estructura para el cubo de 17x17, la solución final fue la de hacer uso del sistema *binary approach*, muy parecido al usado por Grégoire Pfennig, pero con una capa más, o sea, en vez de un cubo interior de 9x9 como diseño Pfennig, un cubo interior de 17x17 tal y como se muestra a continuación.

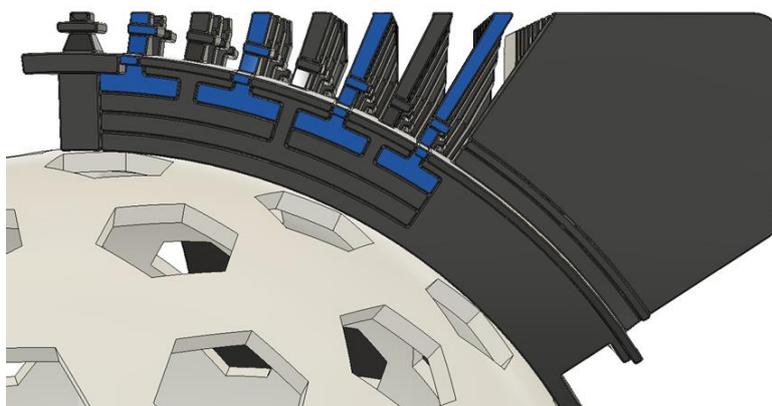
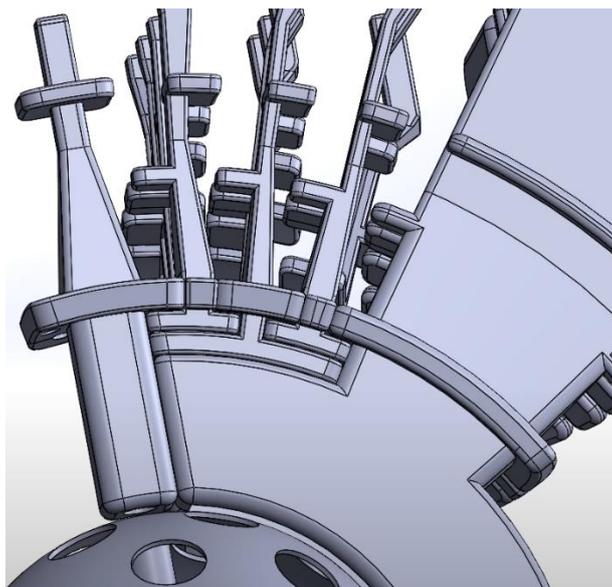
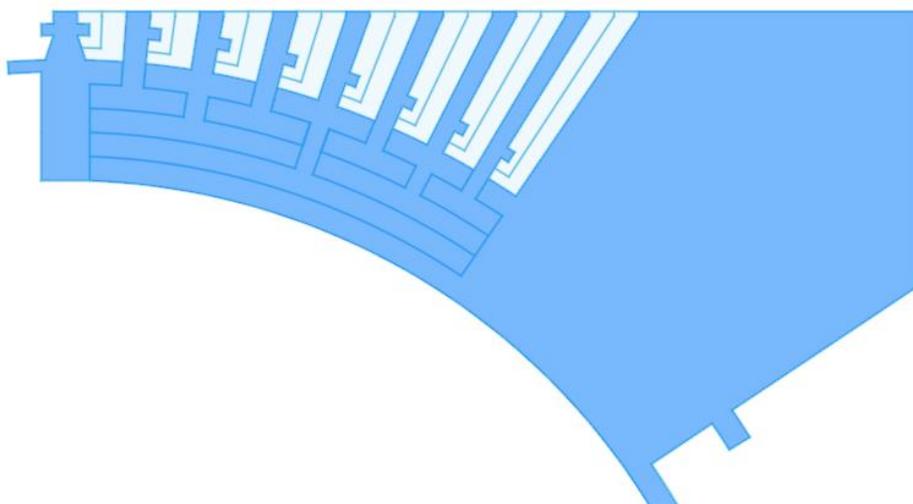


Ilustración 95 | Elaboración propia | Corte transversal del cubo de 49x49. Las piezas marcadas en azul son las piezas adicionales para pasar de una estructura interior de 9x9 a una de 17x17



*Ilustración 96 | Captura de pantalla del cubo de Rubik de 33x33 (Pfennig, 2017) | Imagen de comparación con cubo de 33x33. Piezas en azul son piezas añadidas para crear una estructura interior de 17x17, a diferencia de la estructura interior de 9x9 del cubo de Grégoire*

Todas las piezas que forman la estructura interior de 17x17 corresponden a esta imagen del cubo de Grégoire de 33x33. En este caso, la estructura interior está formada por un cubo de 9x9. En la próxima imagen podemos apreciar las piezas extra remarcadas en color azul.



*Ilustración 97 | Elaboración propia | Ilustración 95 Ilustrada en un plano. Las piezas marcadas en azul forman la estructura interior a partir de la técnica binary approach*

Con el anterior plano (Ilustración 95) somos capaces de crear las piezas que forman la estructura interior aplicando todos los conocimientos expuestos en la parte

teórica. El resultado es el visto en esta imagen, la cual muestra una cuarta parte de una de las caras del cubo.

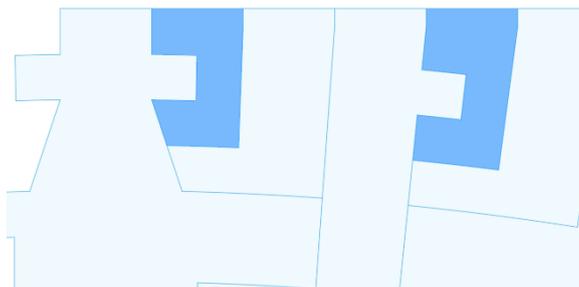


*Ilustración 98 | Estructura interior creada a partir del plano de la Ilustración 97*

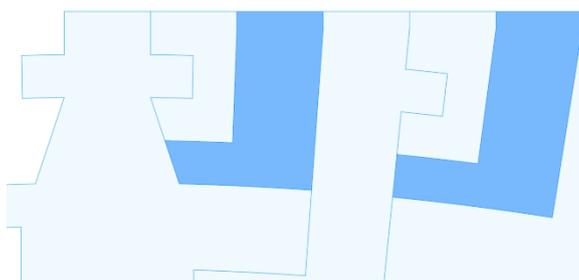
Este cubo interior de 17x17 es completamente funcional e independiente de la estructura exterior, pero, en cambio, la estructura exterior es dependiente de la estructura interior, es decir, esta no podría sujetarse al cubo sin la existencia de la estructura interior.

### 3.2.2 Diseño de la estructura exterior

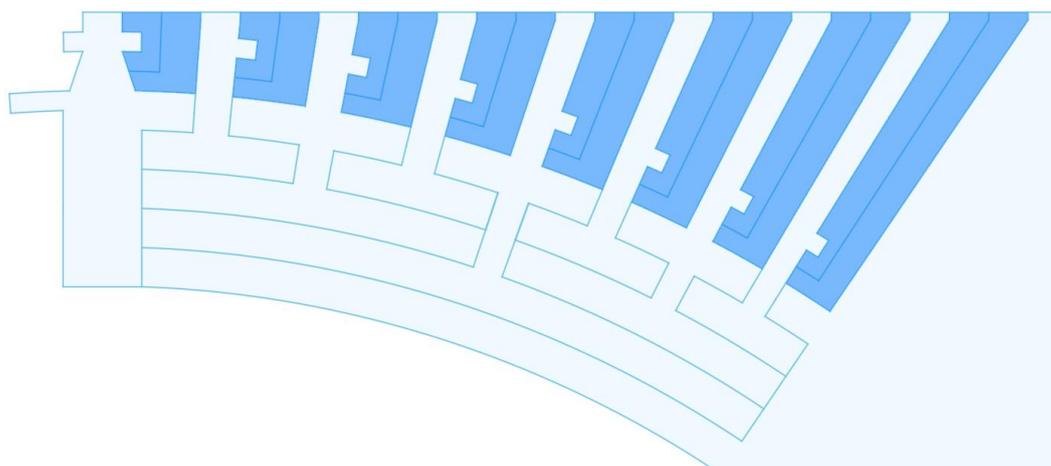
Al ya haber definido la cantidad de piezas entre pieza de la estructura interior y diseñado la distribución de la estructura interior, el último paso es desarrollar los métodos de sujeción de las piezas de la estructura exterior, en este caso, dos entre cada pieza de la estructura interior. Al ser solamente dos se simplifica el diseño de estas. De las muchas soluciones que fueron propuestas, la decisión final fue la solución con las curvas más rectas y suaves de todas para reducir así los posibles puntos críticos y aportar un movimiento más suave y continuo al cubo.



*Ilustración 99 | Elaboración propia | Solución de unión de las piezas de la estructura exterior. Primera pieza resaltada*



*Ilustración 100 | Elaboración propia | Solución de unión de las piezas de la estructura exterior. Segunda pieza resaltada*



*Ilustración 101 | Elaboración propia | solución de unión de las piezas de la estructura exterior*

En las anteriores imágenes podemos apreciar las piezas que forman la estructura exterior (resaltadas en color azul). La primera de ellas se sujeta a la pieza de su izquierda mediante una pestaña que sobresale de la otra. Así mismo, la segunda pieza de la estructura exterior se sujeta al cubo gracias a una pestaña que sale de la misma y se esconde por debajo de la primera pieza de la estructura exterior. Estas uniones se repiten a lo largo de todas las piezas que forman la estructura exterior.

### 3.3 Tamaño de las piezas centrales

El tamaño de la parte externa de las piezas, en otras palabras, la parte que queda expuesta define el tamaño total del cubo además de reducir o aumentar costes de producción de este. El cubo de 49x49 debía tener un tamaño de las piezas centrales suficientemente grande para poder adaptarse a las necesidades del dedo humano para que fuese posible girarlo por este, pero lo más pequeño posible para reducir costes de producción del cubo, uso de material de impresión de las piezas, superficie en contacto la cual se traduce en una mayor fricción entre las piezas, y masa total del cubo de Rubik. Es por eso que la decisión final del tamaño de las piezas centrales fue de 5 x 5 mm, un tamaño que no imposibilita el giro y visión para el humano, pero que no se traduce en un cubo extremadamente grande al aplicarlo en un cubo de Rubik de 49x49.

### 3.4 Tamaño de las piezas laterales

Al ya haber definido el número de piezas por lado ( $n = 49$ ) y la longitud de las piezas centrales ( $l = 5$  mm) podemos pasar a calcular el tamaño de las piezas laterales para que estas, como se explica en la parte teórica, puedan unirse al cubo de forma satisfactoria ya que, de lo contrario, quedarían expuestas al exterior y no podrían sujetarse al cubo. Si aplicamos la fórmula mostrada en la parte teórica nos da que la longitud de las piezas laterales ( $x$ ) debe de ser mayor de 48.67  $x = f(49,5) > \frac{49-2}{2}5\sqrt{2} - \frac{49-2}{2}5 > 48.67$  mm, y, sabiendo que  $X$  debe de ser varios mm mayor de 48.67, se aumentó este en aproximadamente 10 mm, exactamente en 8,83 mm, es decir,  $48.67 + 8.83 = 57.5$  mm, el cual se traduce en un tamaño total del cubo de 350 x 350 x 350 mm ( $57.5 \cdot 2 + 5 \cdot 47 = 350$  mm)

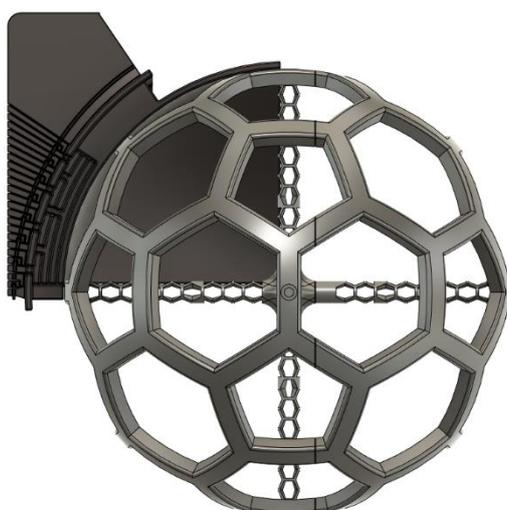
### 3.5 Reducción de masa interior

Algo que puede influir en los costes y la calidad del cubo de Rubik es la cantidad de material que se usa. No solamente un mayor uso de material encarece los costes de producción, sino que el aumento del tamaño de las superficies en

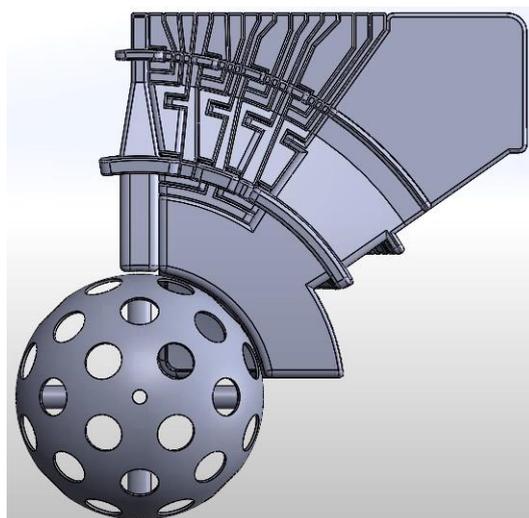
contacto se traduce en un aumento de la superficie en rozamiento, lo que provoca una mayor fricción y resistencia al movimiento degradando así la calidad de giro del cubo. Es por eso que una de las mayores diferencias del diseño de este cubo con respecto al resto de cubos ya existentes es una gran área hueca en el centro del cubo. En estas imágenes podemos comparar el área hueca en el cubo de Grégoire con respecto al diseño del cubo de 49x49.

En el cubo de 33x33, aunque la información del tamaño exacto de la esfera no esté en dominio público, podemos calcular con la Ilustración 103 que el costado del cubo es 6,7 veces mayor del radio de la esfera, lo que significa que la esfera solamente significa el 1,7% del volumen total del cubo. La cantidad de material ahorrado en este es insignificante y se entiende que la esfera actúa mayoritariamente como centro del cubo y no como herramienta de reducción de peso, costes y tiempo de impresión.

En cambio, al diseñar el cubo de 49x49 nos dimos cuenta de que al hacer esta esfera más grande podíamos ahorrar costes logísticos y económicos. El tamaño del costado del cubo mide 350 mm y el radio de la esfera mide 140 mm, es decir, la esfera significa el 26,8% del volumen total del cubo, o, de misma forma, la esfera del cubo de 49x49 reduce 16 veces más masa que la del cubo de 33x33. De hecho, debido al diseño usado era muy complicado hacer la esfera interior aún más grande y este fue el máximo al que se optó manteniendo una estructura sólida sin riesgo de fractura parcial o completa de las piezas.



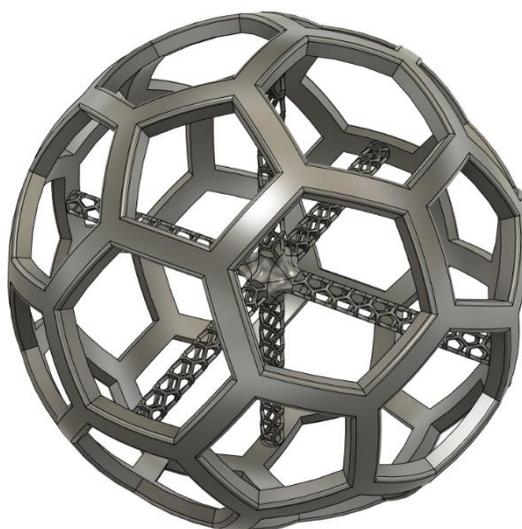
*Ilustración 102 | Elaboración propia | Imagen del cubo de Rubik de 49x49 que muestra la gran cantidad de área vacía gracias a la esfera interior*



*Ilustración 103 | Captura de pantalla del cubo de Rubik de 33x33 (Pfennig, 2017) | Imagen de comparación con la Ilustración 102*

## 3.6 Diseño de la esfera interior

Para diseñar la esfera interior se optó por la combinación de hexágonos y pentágonos ya conocida por su extenso uso en pelotas de fútbol. Esto le otorga una gran resistencia a toda la estructura haciendo uso de la mínima cantidad de material posible. Además, para darle una mayor estabilidad se le incluyeron 6 ejes que se unían en el centro. Todos ellos están vaciados siguiendo la geometría empleada por las abejas en sus panales para otorgar la máxima resistencia reduciendo al máximo la cantidad de material usado.



*Ilustración 104 | Elaboración propia | Esfera interior*

## 3.7 Permutaciones del cubo de Rubik

Si aplicamos la Fórmula 14 para calcular las permutaciones de un cubo de Rubik podemos saber cuántas permutaciones tendremos en un cubo de Rubik de 49x49.

$$x = 8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{10} \cdot 24!^{\frac{n-3}{2}} \left( \prod_{i=4}^6 \left( \frac{(28-i)!}{4! (24-i)!} \right) \right)^{\left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \frac{n-3}{2}} =$$

$$= 1.5210196839 \cdot 10^{9129} \text{ permutaciones posibles.}$$

Esto significa que un cubo de Rubik de 49x49 de 13.833 piezas tiene un total de 9130 dígitos de combinaciones posibles.

### Curiosidades:

Para poner este número en perspectiva, por ejemplo, se estima que hay  $3.75 \cdot 10^{20}$  granos de arena en el planeta tierra.

Por si fuera poco, se estima que en el universo observable existen  $10^{82}$  átomos, valor insignificante al lado de las  $1.52 \cdot 10^{9129}$  permutaciones del cubo.

La supercomputadora cuántica Summit tiene una capacidad de cálculo de 200 “teraflops” (200 millones de millones de operaciones en coma flotante por segundo). Si usáramos todo el potencial de esta computadora nos demoraría  $2.4115 \cdot 10^{9107}$  años en hacer  $1.52 \cdot 10^{9129}$  operaciones en coma flotante por segundo y, sabiendo que el universo tiene un total de 13.700 millones de años, necesitaríamos  $1.75 \cdot 10^{9097}$  universos idénticos al nuestro para poder calcular esta extrema cantidad de operaciones. Aún creando tantas computadoras cuánticas como átomos en el universo, seguiríamos necesitando de  $1.75 \cdot 10^{9015}$  universos para calcular tantas operaciones como permutaciones tiene el cubo de Rubik de 49 x 49.

## 3.8 Aplicaciones para reducción de la fricción

Para reducir la fricción entre las piezas del cubo se ha optado por las soluciones más simples de todas: masa, coeficiente de fricción y superficie en contacto. En todas las piezas se ha tratado de optimizar la resistencia de ellas reduciendo la cantidad de material usado en ellas. Esto le otorga una menor presión entre piezas y una menor resistencia al movimiento. Además, ha sido crucial escoger la tecnología correcta que ofreciera superficies lo más lisas y menos porosas posible, además de escoger el material adecuado para ello. Por último, al diseñar el cubo se ha optado por la sencillez de este. En vez de hacer diseños entreverados que otorgan un movimiento exquisito, como en el caso del 17x17, se ha optado por hacer un diseño lo más simple posible, reduciendo al máximo la superficie en contacto lo cual se traduce en una menor resistencia al movimiento.

## 3.9 Selección de la tecnología

Fueron muchas las opciones de tecnologías aplicables al cubo. Una de las primeras que se tuvo en consideración fue la inyección de plástico. Desafortunadamente, esta clase de cubos requieren una gran cantidad de moldes, hecho que dispararía el presupuesto necesario para llevar el proyecto a cabo. Estos moldes pueden costar entre 3.000 - 100.000 \$, y no era en absoluto viable hacer 578 moldes. Es por ello que se definió que este proyecto debía ser impreso con una tecnología de impresión 3D, las cuales no se cobran por cantidad de moldes, sino por material usado y tiempo de impresión. Los principales candidatos eran: SLA, SLS y MJF. El cubo de 33x33 de Grégoire Pfennig fue impreso en SLS, lo cual nos demostraba que esta podía ser perfectamente la vía que seguir.

Aun así, nos enfocamos mucho con la tecnología SLA. Esta ofrecía unos resultados impecables y permitía usar materiales pensados específicamente para piezas que deben tener la menor fricción posible entre sí. Se estimó que el coste de impresión haciendo uso de dicha tecnología sería de 54.281,02 € sin IVA ni Portes ni retirada de soportes. Aunque seguía siendo bastante costoso, era mucho más barato que usando inyección de plástico.

También se valoró el uso de MJF. Al principio se estimó un coste similar al de la tecnología SLA, y, para obtener una superficie no tan perfecta, no valía la pena el intento. Aun así, se siguieron analizando distintas formas de reducir costes, hasta que nos dimos cuenta de una característica única de las impresoras MJF. Estas, a diferencia de las otras impresoras, tienen unas dimensiones de impresión de hasta 380 x 285 x 380 mm. Esto significaba que, si el cubo medía 350 x 350 x 350 mm se podía imprimir el cubo entero en solamente dos “buckets”, o sea, en solamente dos impresiones podíamos imprimir el cubo entero. Sabiendo que el coste de un “bucket” es de 1.500 € vimos que éramos capaces de imprimir el cubo con tan solo 3.000 €, lo que significaba una reducción del 90% respecto al anterior coste estimado. Además, una característica única de las tecnologías MJF y SLS es la capacidad de imprimir piezas con juntas y que salgan de la impresora completamente funcionales. Esto significaba que, hecho correctamente, se podían imprimir las 13.833 piezas en tan solo dos “buckets” sin necesidad de colocar a mano pieza por pieza, ya que estas ya saldrían posicionadas correctamente de la impresora.

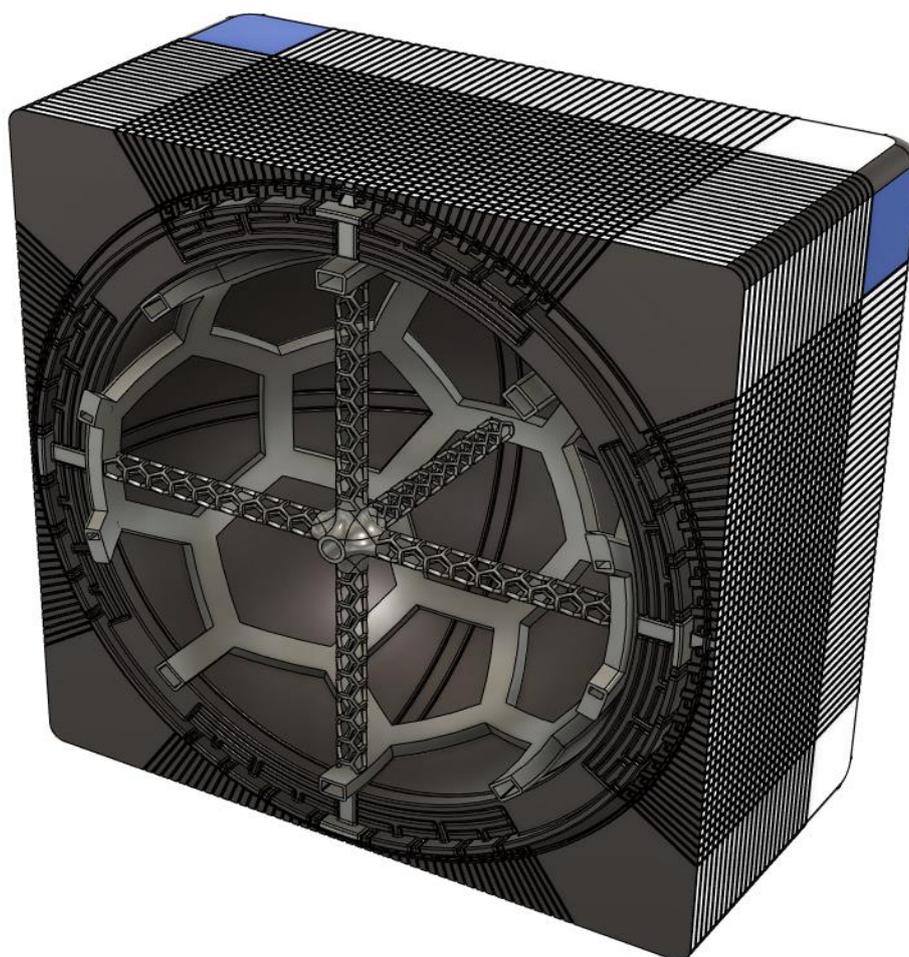
### 3.10 Adaptación del diseño a la tecnología

Conociendo las características de la tecnología MJF se diseñaron dos mitades del cubo. Cada una de ellas cabría en un “bucket” y después serían juntadas con precisión. Además, la esfera debía tener unas uniones ya que esta sería la única pieza a la que se le aplicaría un producto para pegar el conjunto de piezas y mantener el cubo fijo. Otro factor para tener en consideración era que las mitades no debían ser exactamente iguales. Solamente una de ellas debía contener las piezas del eje central.

Además, HP nos proporciona una guía para adaptar cualquier diseño a su tecnología (HP MJF Handbook). Gracias a ello, pudimos aplicar la tolerancia mínima entre piezas móviles (0,7 mm), aplicar el mínimo grosor de pared (0,3 mm), y aplicar la separación mínima en estructuras de celosía (0,5 mm).

## 3.11 Fase de preproducción

Hasta la fecha, gracias a la colaboración de HP en el proyecto, la empresa desarrolladora de la tecnología MJF, hemos empezado a trabajar con la fase de preproducción. Esta, a grandes rasgos, se basa en asegurarse que no nos encontremos ningún fallo a la hora de llevar a cabo la fase de producción.



*Ilustración 105 | Elaboración propia | Imagen de una de las dos mitades que conforman el cubo. En esta se ven las uniones de la esfera interior, el corte transversal y el área interna hueca.*

Además de revisar el diseño y comprobar que este sea completamente funcional, es recomendable hacer una prueba de la idea planteada a menor escala. En este caso se decidió hacer una prueba con un cubo de 5x5 haciendo uso de los mismos conceptos. Se usó un diseño simple, una esfera interior de gran tamaño, se dividió el cubo en dos mitades, se aplicó la misma tolerancia y se diseñaron dos cajas que mantuvieran las piezas unidas.

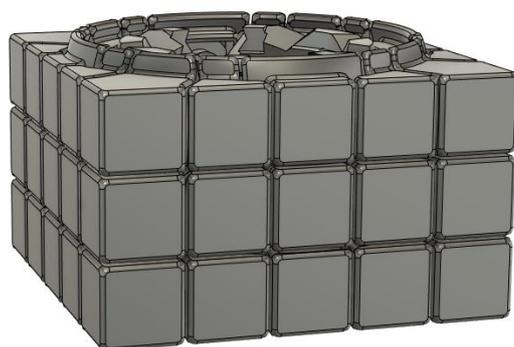


Ilustración 106 | Elaboración propia | Primera mitad del cubo de 5x5

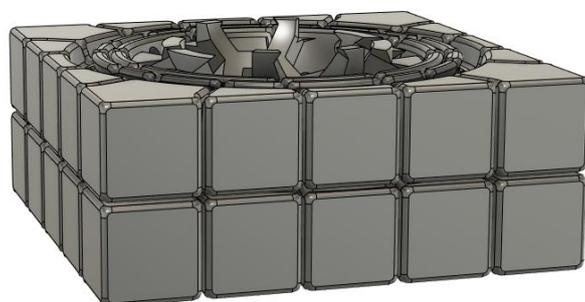


Ilustración 107 | Elaboración propia | Segunda mitad del cubo de 5x5



Ilustración 108 | Elaboración propia | Caja para mantener las piezas unidas



Ilustración 109 | Elaboración propia | Piezas de la Ilustración 106 en la caja de la Ilustración 108

Más adelante, antes de empezar la fase de producción, deberán diseñarse dos cajas iguales en el cubo de 49x49. Esta caja mantiene las piezas unidas hasta el momento en el que las dos mitades son unidas, en que se les puede retirar la tapa superior.

## 3.12 Estudio de la viabilidad de la patente

En colaboración con la empresa INGENIAS se hizo el estudio de la viabilidad de la patente. Se buscaron patentes existentes y se estudió exhaustivamente el diseño del cubo para definir qué partes podrían ser patentables y cuáles no. Se desarrolló una memoria técnica para poder presentar a la OEPM y proteger el documento, pero después de varias reuniones se llegó a la conclusión de que no era posible patentar dicho cubo. Estos fueron los comentarios de la empresa justificando el porqué de la inviabilidad de la patente de la invención:

- *“A pesar de que la invención del cubo de Rubik de 49x49x49 supone un trabajo técnico considerable, creemos que el mecanismo de funcionamiento tiene una gran mayoría de características técnicas en común con el antecedente divulgado por Grégoire Pfennig, en el cual se ha basado la invención.”*
- *“Incluso si se pudiera justificar la actividad inventiva, debido a la disminución de la relación peso/tamaño y/o a la supresión de una parte del mecanismo con respecto a la invención de Pfennig, consideramos que la protección de la invención en formato de patente no permitiría conseguir una protección efectiva. Es decir, si por ejemplo se mantuviera el*

*mecanismo desarrollado por Pfennig y se siguiera la sucesión lógica de piezas en este tipo de cubos de Rubik para obtener el cubo de 49x49x49, se obtendría un cubo con el mismo número de piezas que el de la invención propuesta y que externamente podría perfectamente ser idéntico. Además, el usuario del cubo no detectaría diferencia funcional para resolver el puzle. Digamos que se podría hacer un cubo de Rubik de 49x49x49 que fácilmente evitase la patente, pero que estética y funcionalmente fuese idéntico. De este modo, a pesar de que el mecanismo pudiera tener algunas diferencias, a efectos prácticos se obtendría un cubo igualmente funcional y que no infringiría la patente basada en la invención propuesta.”*

*“En base a los comentarios anteriores, no recomendamos la protección de la presente invención.”*

Aunque existía un claro trabajo de investigación y desarrollo detrás del diseño del cubo de Rubik de 49x49, los ingenieros no lo consideraban suficiente para justificarlo como innovación inventiva, ya que todo cubo de Rubik sigue un orden lógico, además de usar en este el método conocido como *binary approach*, el empleado por Grégoire Pfennig.

Aunque podíamos arriesgarnos y presentar la memoria técnica a la OEPM, siguiendo las recomendaciones de los ingenieros de INGENIAS no se presentó dicha memoria.

### 3.13 Análisis DAFO

Para poder presentar el proyecto a empresas e inversores que pudieran estar interesados, además de hacer un análisis interno del proyecto para detectar las fortalezas y debilidades de este, se optó por realizar un análisis DAFO.

Respecto las debilidades del proyecto, se consideraron las siguientes:

- Alta cantidad de componentes del producto
- Alto precio de producción y venta del producto
- Dificultad de venta del producto debido a su alto coste de producción

- Alto tiempo de producción de los componentes

Respecto las amenazas del proyecto, se consideraron las siguientes:

- Aparición de un nuevo proyecto empresarial que supere en cantidad de piezas la idea de negocio e inhabilite la posibilidad de obtener el WR.
- Riesgo de mal funcionamiento debido a su alta cantidad de componentes que crean una alta fricción entre las piezas.
- Bajo poder adquisitivo
- Inestabilidad económica y social a causa de la crisis del SARS-CoV-2.

Respecto las fortalezas del proyecto, se consideraron las siguientes:

- Logro y confirmación del Récord Mundial con un juez de “Guinness World Records”.
- Atracción de la idea de negocio en las redes sociales y medios de comunicación.
- Edad de los directivos y creadores del proyecto.
- Confirmación por parte de arquitectos, ingenieros y físicos de el correcto funcionamiento teórico en una simulación con ordenador.
- Diseño optimizado con la ayuda de profesionales arquitectos, físicos e ingenieros.

Respecto las oportunidades del proyecto, se consideraron las siguientes:

- Aparición en el libro oficial de “Guinness World Records”.
- Inscripción del proyecto a concursos regionales, nacionales e internacionales.
- Entrada del producto al mercado y su conexión con su público objetivo.
- Promoción de las empresas patrocinadoras.
- Creación de una plataforma empresarial con la que se crearán nuevos proyectos ambiciosos e innovadores.
- Creación de una red de clientes, empresas y particulares interesados en futuros proyectos de la empresa.

## 3.14 Búsqueda de inversores y colaboradores

Un apartado al que se le ha dedicado una gran cantidad de tiempo es a la búsqueda de empresas que estuvieran interesadas en colaborar en el proyecto. Además del análisis DAFO se desarrollaron documentos para presentar el proyecto a dichas empresas y así pudieran conocer los objetivos de este. Se contactaron una gran cantidad de empresas. De la gran mayoría de ellas no se obtuvo respuesta, además, muchas de I0061s que respondieron argumentaron que debido a la pandemia del coronavirus no podían permitirse apoyar proyectos de gran envergadura como este. Fueron pocas las empresas con las que tuvimos una conversación satisfactoria, y muy pocas de ellas llegaron a colaborar directamente con el proyecto. Las tres empresas principales que han ofrecido su tiempo y recursos para apoyar este proyecto han sido HP (Hewlett-Packard Development Company, L.P.), INGENIAS (Ingenias) y ABAX (Abax Innovation Technologies) en sus respectivos campos.

## 4. Conclusiones

Una vez finalizado este trabajo podemos exponer las conclusiones a las que hemos llegado.

En primer lugar, podemos afirmar que, tal y como planteábamos en el primer y principal objetivo, hemos sido capaces de diseñar y desarrollar el cubo de Rubik más grande del mundo.

En segundo lugar, atendiendo al segundo objetivo, hemos visto la complejidad de patentar este cubo de Rubik debido a la facilidad con la que cualquier individuo podría evitar la protección jurídica de ésta. Es por ello que se ha optado por no patentar el proyecto.

En tercer lugar, y como tercer objetivo planteado al inicio de este trabajo, hemos sido capaces de, juntamente con HP, empezar la fase de preproducción del cubo de Rubik, realizando un análisis exhaustivo de todos los componentes y piezas de este, e imprimiendo réplicas a pequeña escala para demostrar el correcto funcionamiento y planteamiento de este.

Concluyendo, y teniendo presente que nos ha consumido una gran cantidad de nuestro tiempo y se ha prolongado durante más tiempo del estimado, consideramos que los resultados del proyecto han sido absoluta y totalmente satisfactorios.

Aun así, el proyecto no termina aquí, y nos proponemos seguir progresando para lograr cumplir el objetivo final a largo plazo que, a grandes rasgos, se basa en crear a nivel físico el cubo de Rubik más grande del mundo obteniendo así el “Guinness World Record”.

## 5. Bibliografía

*3D Hubs*. (s.f.). Obtenido de Injection molding: <https://www.hubs.com/guides/injection-molding/#the-basics>

*3D Hubs*. (s.f.). Obtenido de 3D Printing: <https://www.hubs.com/knowledge-base/3d-printing/>

*3D printing industry*. (s.f.). Obtenido de Carl Deckard, the invenor of SLS, passes away: <https://3dprintingindustry.com/news/carl-deckard-the-inventor-of-sls-passes-away-166853/>

Abax Innovation Technologies. (s.f.). Obtenido de [www.abax3dtech.com](http://www.abax3dtech.com)

Bournias Varotsis, A. (s.f.). *3D Hubs*. Obtenido de HP MJF vs. SLS: A 3D printing technology comparison: <https://www.hubs.com/knowledge-base/hp-mjf-vs-sls-3d-printing-technology-comparison/>

Bournias Varotsis, A. (s.f.). *3D Hubs*. Obtenido de Introduction to binder jetting 3D printing: <https://www.hubs.com/knowledge-base/introduction-binder-jetting-3d-printing/>

Bournias Varotsis, A. (s.f.). *3D Hubs*. Obtenido de Introduction to material jetting 3D printing: <https://www.hubs.com/knowledge-base/introduction-material-jetting-3d-printing/>

Bournias Varotsis, A. (s.f.). *3D Hubs*. Obtenido de What is FDM 3D printing?: <https://www.hubs.com/knowledge-base/what-is-fdm-3d-printing/#what>

Bournias Varotsis, A. (s.f.). *3D Hubs* . Obtenido de What is SLS 3D printing?

Bournias Varotsis, A. (s.f.). *3D Hubs* . Obtenido de What is SLA 3D printing?: <https://www.hubs.com/knowledge-base/what-is-sla-3d-printing/#what>

Crespo Cepeda, J. (17 de 10 de 2021). *QuantumFracture*. Obtenido de 10 Patentes Españolas que han Hecho Historia: <https://www.youtube.com/watch?v=Yn42xhAkFul&t=555s>

*Descubre Arduino*. (s.f.). Obtenido de Multi Jet Fusion, Todo lo que necesita saber sobre la impresión 3D con MJF: <https://descubrearduino.com/jet-fusion/>

Eduardo Baño, M. (14 de 07 de 2020). *Interempresas* . Obtenido de Beneficios y problemáticas del proceso de la inyección de plástico: <https://www.interempresas.net/Plastico/Articulos/308676-Beneficios-y-problematicas-del-proceso-de-la-inyeccion-de-plastico.html>

Fisher, T. (28 de 01 de 2018). *Assembling a Yuxin 17x17x17 Rubik's Cube (17x17 twisty puzzle)(speeded up version)*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=rg9bRZd6jvA&t=116s>

*FormLabs*. (2020). Obtenido de SLA o DLP: guía comparativa de impresoras 3D de resina: <https://formlabs.com/es/blog/comparacion-impresoras-3d-resina-sla-dlp/>

Gatto, F. (01 de 01 de 2019). *Kaia Joyas Uruguay*. Obtenido de Todo lo diseñado no se puede imprimir: <https://kaiajoyasuruguay.blogspot.com/2019/01/todo-lo-disenado-no-se-puede-imprimir.html>

Hewlett-Packard Development Company, L.P. (s.f.). Obtenido de [www.hp.es](http://www.hp.es)

*HP MJF Handbook*. (s.f.). Obtenido de <https://reinvent.hp.com/us-en-3dprint-mjfhandbook>

*Ibero Rubik*. (29 de 01 de 2015). Obtenido de <https://www.iberorubik.com/2015/01/22/cu%C3%A1ntas-combinaciones-tiene-el-cubo-de-rubik/>

*Ingenias*. (s.f.). Obtenido de Patentes y Marcas Barcelona: [www.ingenias.es](http://www.ingenias.es)

*Innovación y Tecnología*. (s.f.). Obtenido de Impresoras 3D por tecnología DLP: <https://www.innovacion-tecnologia.com/fabricacion-aditiva/impresoras-3d-tecnologia-dlp/>

*INPI*. (s.f.). Obtenido de ¿Qué son las patentes?: <https://www.inapi.cl/portal/institucional/600/w3-article-744.html>

Justel, S. (26 de 04 de 2014). *La Vanguardia*. Obtenido de Blackberry, auge y caída en una década: <https://www.lavanguardia.com/tecnologia/moviles-dispositivos/20131205/54395203230/blackberry-auge-caida-decada.html>

*Lemelson MIT.* (s.f.). Obtenido de Larry Hornbeck:  
<https://lemelson.mit.edu/resources/larry-hornbeck>

Lucía C. (23 de 11 de 2017). *3D natives*. Obtenido de Beneficios de una impresora 3D SLS en la industria: <https://www.3dnatives.com/es/beneficios-impresora-3d-sls-231120172/>

Maw, I. (s.f.). *3D Hubs*. Obtenido de What is multi-jet fusion?:  
<https://www.hubs.com/knowledge-base/what-is-multi-jet-fusion/>

mpena. (s.f.). *Innovación y tecnología*. Obtenido de Sinterizado selectivo por Láser:  
<https://www.innovacion-tecnologia.com/fabricacion-aditiva/sinterizado-selectivo-por-laser/>

*Museo virtual.* (s.f.). Obtenido de Brunelleschi, Filippo:  
[http://historico.oepm.es/museovirtual/galerias\\_tematicas.php?tipo=INVENTO&xml=Brunelleschi,%20Filippo.xml](http://historico.oepm.es/museovirtual/galerias_tematicas.php?tipo=INVENTO&xml=Brunelleschi,%20Filippo.xml)

*OEPM.* (s.f.). Obtenido de Propiedad Industrial - Normativa - Normas comunes - Nacional:  
[https://www.oepm.es/es/propiedad\\_industrial/Normativa/normas\\_comunes/Nacionales/](https://www.oepm.es/es/propiedad_industrial/Normativa/normas_comunes/Nacionales/)

Pfennig, G. (2 de 12 de 2017). *GP Woodworking & Designs - Greg's Channel*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=NqJC3YxfcyM>

*Privarsa.* (17 de 07 de 2017). Obtenido de La Inyección De Plástico: Una Historia De Éxito: <https://www.privarsa.com.mx/la-inyeccion-plastico-una-historia-exito/>

*RAE.* (s.f.). Obtenido de Patente: <https://dle.rae.es/patente>

Sienra, R. (06 de 05 de 2021). *My Modern Met*. Obtenido de 10 Datos sobre Filippo Brunelleschi y el famoso Duomo de Florencia:  
<https://mymodernmet.com/es/filippo-brunelleschi-duomo/>

van der Steen, D. (s.f.). *3D Hubs*. Obtenido de Industrial SLA/DLP vs. desktop SLA/DLP: <https://www.hubs.com/knowledge-base/industrial-slalpl-vs-desktop-slalpl/>

Villaroya Gaudó, M., Alastruey Benedé, J., Resano Ezcaray, J., Torres Moreno, E., & Suárez García, D. (18 de 09 de 2017). *Universidad de Zaragoza | Cómo redactar una memoria técnica*. Obtenido de [http://webdiis.unizar.es/~jresano/wp-content/uploads/Ayuda\\_elaboracion\\_memoria\\_tecnica.pdf](http://webdiis.unizar.es/~jresano/wp-content/uploads/Ayuda_elaboracion_memoria_tecnica.pdf)

## 6. Anexo

Este trabajo se complementa con la memoria técnica del cubo de Rubik de 49x49 que se puede encontrar adjunta en el documento: “Memoria técnica | El cubo de Rubik más grande del mundo”.